Chapitre 4

Équations différentielles : première approche

Plan du cours

1. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ? 55
2. Équations différentielles linéaires du premier ordre 62
3. Équations différentielles non linéaires 66
4. Équations différentielles linéaires à coefficients constants du deuxième ordre 70
5. À retenir 75

16 sept. 2015

Avertissement Il serait présomptueux de considérer ce cours comme complet concernant les équations différentielles. L'idée générale est de donner *quelques* méthodes de résolution d'équations différentielles pour des cas relativement restreints et "simples" (d'un point de vue théorique). Ainsi, la compréhension de ce cours passe par de nombreux exercices, calculatoires, à savoir faire.

§1 : Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

I/ Définition générale

Définition 1 : Une *équation différentielle ordinaire* est une équation de la forme

$$\Psi\left(x, y(x), y'(x), \cdots y^{(n)}\right) = f(x),$$

où l'inconnue est une fonction y de la variable x ; f est une fonction donnée, $n \in \mathbb{N}$ non nul, et Ψ est une fonction à $n+2$ variables [2]. Le n maximal apparaissant dans l'équation est appelé *ordre* de l'équation différentielle.

Définition 2 : Résoudre une équation différentielle ordinaire, c'est trouver un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction y suffisamment dérivable sur I qui vérifie l'équation posée.

Ainsi posée, cette définition est très générale, et ne donne pas beaucoup d'indices sur la résolution de telles équations. Avant de présenter des exemples classiques et de déterminer la méthode de résolution de certaines équations différentielles, un premier exemple très simple.

Étant donnée $f : I \to \mathbb{R}$ continue, résoudre l'équation différentielle :

$$y'(x) = f(x).$$

C'est un cas particulier d'équations différentielles, avec $\Psi(x_1, x_2, x_3) = x_3$, qui équivaut à la recherche d'une primitive de f. Notamment, on remarquera qu'il y a plusieurs solutions (la fameuse constante dans le calcul de primitives), propriété que l'on va retrouver par la suite. Par ailleurs, on a vue que pour un a fixé, il existe une unique primitive de la fonction f s'annulant en a. Cette notion peut se retrouver avec les équations différentielles, grâce à la notion de problème de Cauchy.

Définition 3 : On considère une équation différentielle $\Psi(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = f$. Soient alors $n+1$ nombres réels $x_0, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$. On appelle *problème de Cauchy* le problème suivant :
trouver une fonction y solution de l'équation différentielle et vérifiant en outre,

$$\begin{cases} y(x_0) & = & y_0, \\ y'(x_0) & = & y_1, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1}. \end{cases}$$

II/ Modélisation : quelques exemples classiques

Les équations différentielles ne sont pas qu'une notion mathématique. Elles interviennent dans différents domaines d'application, pour modéliser certains phénomènes. Dans beaucoup d'applications, elles apparaissent lorsqu'on s'intéresse à la variation d'une quantité. Donnons quelques

2. Voir le cours suivant pour des rappels sur les fonctions de plusieurs variables

exemples classiques d'équations différentielles ordinaires. Pour chaque exemple présenté, notons qu'il s'agit de *modèles* ; en tant que tels, ils ont des limitations (i.e. ne pas les voir comme des vérités absolues) sur lesquelles on ne philosophera pas dans ce cours.

Désintégration radioactive

"La décroissance radioactive est la réduction du nombre de noyaux radioactifs (instables) dans un échantillon. La décroissance radioactive se produit jusqu'à ce que tous les noyaux de l'échantillon soient stables." (selon Wiki).
Pour modéliser la décroissance radioactive, on note $N(t)$ la quantité (ou la proportion) de noyaux radioactifs présents dans un échantillon à un instant t donné. La variation de cette quantité au cours du temps est supposée ne dépendre que du nombre de noyaux radioactifs présents, i.e., plus il y a de noyaux radioactifs présents, plus le nombre de noyaux qui se désintègrent à l'instant t est grand. La variation de N au cours du temps est donnée par $N'(t)$, et il semble raisonnable de supposer que le taux de désintégration reste constant, disons une valeur $k \in \mathbb{R}$ positive. Ceci mène à l'équation différentielle pour N :

$$N'(t) = -kN(t). \tag{1}$$

Remarque: *Cette équation traduit bien le fait que* N *va décroître.*

Modèles de population

Il existe plusieurs modèles de population. L'un des plus simples, appelé *modèle logistique* est dû à Verhulst [3]. On note $P(t)$ l'effectif d'une population à un instant t. Certains modèles existaient déjà, mais produisaient des croissances exponentielles (en particulier non bornées). Pour palier à ce problème, Verhulst introduit une notion d'effectif limite. On s'intéresse à la variation de population, i.e. à $P'(t)$. Dans ce modèle, on suppose que cette variation est dûe à deux facteurs :

1. un facteur de croissance proportionnel à la population à l'instant t,
2. un facteur de décroissance dû à une population trop proche d'une valeur limite, notée par exemple.

Cela revient à introduire deux paramètres, λ pour le taux de croissance, K pour l'effectif limite, et le modèle logistique consiste en l'équation

$$P'(t) = \lambda P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right). \tag{2}$$

Remarque: *Ce modèle signifie que le taux de croissance de la population* P'/P *est variable, et qu'il est de plus en plus petit à mesure que la population s'approche de l'effectif limite* K.

Modèle génétique

Dans une population, on s'intéresse à la fréquence avec laquelle on retrouve l'allèle d'un certain gène. On considère un cas simple où le gène n'a que deux allèles possibles, disons A ou B. Pour chaque génotype (AA, AB ou BB), on associe un nombre appelé "valeur sélective", qui représente de façon simplifiée le rapport entre le nombre de descendants ayant ce génotype et le nombre de

3. Pierre François Verhulst (1804-1849), mathématicien belge

parents ayant ce même génotype. On introduit les deux paramètrs s_0 et s_1 pour représenter ces valeurs sélectives :

génotype	AA	AB	BB
valeur sélective	ν_{AA}	ν_{AB}	ν_{BB}
valeur sélective relative	$\frac{\nu_{AA}}{\nu_{AB}} = 1 + s_0$	1	$\frac{\nu_{BB}}{\nu_{AB}} = 1 + s_1$

Les paramètres s_0, s_1 sont ici deux paramètres réels, supérieurs à -1. Le modèle génétique décrit l'évolution de la fréquence $x(t)$ de l'allèle A, suivant l'équation différentielle

$$x' = x\,(1-x)\,(x(s_0+s_1) - s_0)\,. \tag{3}$$

Remarque: *Pour plus d'informations sur la dérivation de ce modèle, s'adresser à des gens compétents.*

Chute libre avec frottements

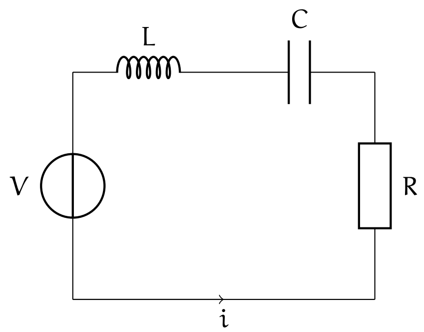
En mécanique du point, le principe fondamental de la dynamique assure que la somme des forces appliquées à un objet ponctuel est égal au produit de sa masse par son accélération. Prenons une masse ponctuelle m, lâchée depuis une hauteur z_0. On veut calculer sa hauteur z au cours du temps. La seule force agissant sur la masse est la pesanteur, si bien que sans frottement, on a une équation du type

$$z'' = -g,$$

où g est la valeur normale de l'accélération de pesanteur, constante. Pour modéliser les frottements, on peut imaginer qu'il s'agit d'une force qui agit dans la direction opposée à la vitesse, et de manière constante. On introduit donc un paramètre $k > 0$, et le bilan des forces sur la particule donne l'équation suivante :

$$z'' = -g - \frac{k}{m} z'. \tag{4}$$

Circuit RLC série



Pour un circuit RLC en série, si on note $u_R(t)$, $u_L(t)$ et $u_C(t)$ respectivement les tensions aux bornes de la résistance, de la bobine et du condensateur, à l'instant t, on a les relations suivantes (i représente l'intensité électrique) :

$$u_R(t) = Ri(t), \qquad u_L(t) = L\frac{di}{dt}, \qquad i(t) = C\frac{du_C}{dt}.$$

On a en outre la relation $u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = V$. Si la tension V appliquée reste constante, en dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient

$$Li'' + Ri' + \frac{i}{C} = 0. \tag{5}$$

Pendule oscillant sans frottements

On s'intéresse aux oscillations du pendule ponctuel de masse m accroché à une tige rigide de longueur l. Avec les notations de la figure 13, la position du pendule est donnée par $l\mathbf{e}_r(t)$. Le vecteur accélération est alors $l\theta''(t)\mathbf{e}_\theta(t) - l\theta'(t)^2\mathbf{e}_r(t)$. Deux forces s'appliquent sur le pendule :

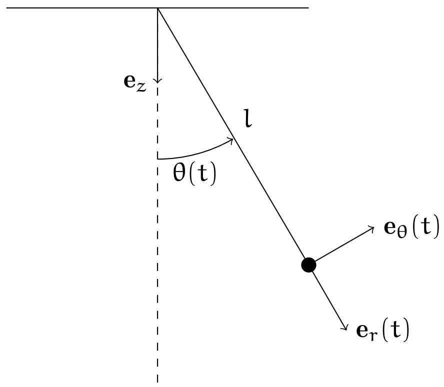


FIGURE 13 – Pendule oscillant

la pesanteur, donnée par $\mathbf{F} = mg\mathbf{e}_z$, et la tension de la tige, donnée par $\mathbf{T} = T\mathbf{e}_r(t)$. Le bilan des forces

$$ml\left(\theta''\mathbf{e}_\theta - \theta'^2\mathbf{e}_r\right) = \mathbf{F} + \mathbf{T}$$

projeté sur $\mathbf{e}_\theta$ donne alors l'équation différentielle

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0. \tag{6}$$

Remarque: *On a utilisé qu'une seule composante en appliquant le principe fondamental de la dynamique. Cela permet, même sans connaître* $\mathbf{T}$*, de décrire le mouvement. On pourrait ensuite en théorie en déduire la tension appliquée à la tige.*

Système proies-prédateurs

Le modèle de Lotka-Volterra est un modèle de populations à deux espèces. Par exemple, une population de lapins, représentée par $l(t)$ et de renards, représentée par $r(t)$. C'est un système d'équations différentielles qui étend le modèle logistique de Verhulst, et il est dû à A. Lotka.[4] Dans ce modèle, le taux de croissance (ou de décroissance) $l'(t)/l(t)$ (resp. $r'(t)/r(t)$) varie en fonction du temps, et dépend du nombre de prédateurs (resp. de proies). En l'absence de renards, la population de lapins augmente ; en l'absence de lapins, la population de renards diminue ; sinon,

4. Alfred J. Lotka (1880-1949), mathématicien, physicien, chimiste et statisticien (!) américain

le taux de croissance des lapins diminue lorsque le nombre de renards grandit, et inversement. Le système qui en découle est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} l'(t) & = & \alpha\, l(t) - \beta\, l(t)r(t), \\ r'(t) & = & -\gamma\, r(t) + \delta\, l(t)r(t), \end{array} \right. \tag{7}$$

où les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres réels positifs.

Zoologie

Juste pour illustrer, on regroupe dans le tableau 5 quelques indications sur le type de chacune des équations différentielles présentées avant. [5] L'un des objectifs de ce cours est de présenter

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
ordre	1	1	1	2	2	2	1
linéaire	✓	✗	✗	✓	✓	✗	✗
homogène	✓			✗	✓		
autonome	✓	✓	✓				✓
coefficients constants	✓			✓	✓		

TABLE 5 – Informations sur les EDO (1) à (7). Les cases vides signifient que la notion n'a pas de sens pour l'équation concernée.

des outils permettant la résolution des modèles (1) à (5). Les deux derniers modèles sont plus compliqués à appréhender.

III/ Existence et unicité de solutions

Comme anoncé au début du chapitre, ce cours est très loin d'être complet sur les EDO. En particulier, on s'intéressera uniquement à deux types d'EDO :

– les EDO d'ordre 1, sous forme résolue, i.e. des EDO de la forme

$$y'(x) = F(x, y(x)), \tag{8}$$

où F est une fonction continue,

– les EDO d'ordre 2 linéaires à coefficients constants, i.e. des EDO de la forme

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \tag{9}$$

où f est une fonction donnée, et a, b sont des réels constants.

Pour le premier type d'équations, on se placera toujours dans un cadre raisonnable pour que le problème de Cauchy admette une unique solution, cf. Compléments pour plus de détails. Pour le deuxième type, dès lors que f est continue, le problème de Cauchy admet une unique solution, définie sur le même intervalle que f. Le reste du cours vise à donner des méthodes permettant de calculer les solutions de ces équations.

Remarque: *En pratique, quand on cherche à résoudre un problème de Cauchy, on cherche d'abord toutes les solutions de l'EDO. On obtient en général une forme standard avec un paramètre λ que l'on essaie ensuite de déterminer pour obtenir la solution désirée.*

IV/ Généralités sur les EDO linéaires

5. certaines notions sont abordées dans les paragraphes suivants

Propriétés générales

Avant de passer aux méthodes de résolution proprement dites, arrêtons nous un moment sur des équations différentielles particulières, pour lesquelles on peut avoir un certain nombre de propriété *a priori.*

Définition 4 : On appelle *équation différentielle ordinaire linéaire* une équation différentielle de la forme

$$a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = f(x), \tag{10}$$

où les a_i et f sont des fonctions de la variable x uniquement.
Une telle équation est dite *homogène* lorsque le second membre f est nul.
Elle est dite *à coefficients constants* lorsque tous les a_i sont des fonctions constantes.

Remarque: *Pour une équation linéaire de la forme* (10)*, l'équation*

$$a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = 0$$

est appelée équation homogène associée.
Les équations différentielles linéaires sont des cas particuliers, que l'on va étudier partiellement dans ce cours. L'une des caractéristiques principales de ces équations est le principe de superposition.

Proposition 5 :

- La fonction nulle est toujours solution d'une EDO *linéaire homogène*,
- Si y_1 et y_2 sont deux solutions d'une EDO *linéaire homogène* définies sur le même intervalle, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\lambda y_1 + y_2$ est encore une solution de l'EDO,
- Si y_1 et y_2 sont deux solutions d'une EDO *linéaire* définies sur le même intervalle, alors $y_1 - y_2$ est solution de l'EDO homogène associée.

Dans le cas où tous les a_i sont des fonctions constantes, on a même le résultat suivant :

Théorème 6 : Si $a_n \neq 0$, alors les solutions de l'équation différentielle

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

sont définies sur $\mathbb{R}$, et forment un espace vectoriel de dimension n, i.e. il existe n fonctions indépendantes $y_{H1}, \cdots, y_{Hn}$ telles que, si y est solution de l'équation, alors

$$y(x) = \alpha_1 y_{H1}(x) + \cdots + \alpha_n y_{Hn}(x),$$

où les α_i sont des réels.
Ce théorème assure que pour trouver toutes les solutions d'une EDO linéaire homogène à coefficients constants, il suffit de trouver les fonctions $y_{H1}, \cdots, y_{Hn}$.
En combinant ce théorème avec le principe de superposition, on peut obtenir le résultat suivant :

Théorème 7 : On considère l'EDO linéaire à coefficients constants

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

avec $a_n \neq 0$. On suppose que l'on connaît une solution particulière y_P à cette équation. Soit alors y une autre solution. Alors on peut écrire

$$y = y_P + \alpha_1 y_{H1} + \cdots + \alpha_n y_{Hn},$$

où les α_i sont des réels, et les y_{Hi} sont les fonctions indépendantes solutions de l'EDO homogène associée.

Remarque: *En d'autres termes, ce résultat assure que pour trouver toutes les solutions d'une EDO linéaire à coefficients constants, il suffit de :*

1. *trouver les solutions de l'équation homogène associée,*
2. *trouver UNE solution particulière.*

À noter que cette méthode reste valide pour les EDO linéaires à coefficients non constants, mais il faut alors faire attention aux intervalles de définition des fonctions.

Calcul des solutions homogènes (coefficients constants)

À une équation différentielle linéaire à coefficients constants, on peut associer un polynôme P appelé *polynôme caractéristique* de la manière suivante.

$$\begin{array}{rl} \text{(EDO)} & a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \\ \text{(polynôme caractéristique)} & P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0. \end{array}$$

Considérons r une racine de ce polynôme caractéristique, i.e. $P(r) = 0$, et posons $y(x) = \exp(rx)$. On remarque alors que $y^{(k)}(x) = r^k \exp(rx) = r^k y(x)$, si bien que :

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = P(r) y = 0.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \exp(rx)$ est une solution homogène. Cette propriété va nous être utile pour calculer les fonctions $y_{H1}, \cdots, y_{Hn}$.

Proposition 8 : Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants, si r est une racine du polynôme caractéristique associé, alors la fonction $x \mapsto \exp(rx)$ est une solution homogène.

Remarque: *Si le polynôme caractéristique* P *a* n *racines réelles distinctes, disons* $r_1, \cdots, r_n$*, alors les fonctions* y_{Hi} *définies par* $y_{Hi}(x) = \exp(r_i x)$ *forment une base de l'espace des solutions homogènes. On verra sur les EDO d'ordre 2 ce qu'il se passe lorsque* P *a des racines doubles ou complexes.*

Calcul d'une solution particulière

Si le calcul des solutions homogènes est systématique (pour les EDO linaires à coefficients constants), la recherche d'une solution particulière peut s'avérer plus délicate. Pour les équations différentielles linéaires *à coefficients constants*, on gardera en tête les techniques suivantes :

- si $f(x)$ est un polynôme, on pourra rechercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme, (en particulier, si f est constant, on pourra chercher une solution particulière constante),
- si le second membre est de la forme $f(x) = P(x)\exp(\alpha x)$ avec P un polynôme, on pourra rechercher une solution sous la même forme $y(x) = Q(x)\exp(\alpha x)$,
- si le second membre est une combinaison linéaire de sin et cos, on peut également chercher une solution particulière sous forme de combinaison linéaire de sin et cos,
- si on n'est dans aucun des cas précédents, ou si on résout une équation à coefficients non constants, on utilisera la méthode de variation de la constante illutrée plus loin. L'idée est de chercher une solution sous la forme

  $$y_P(x) = \alpha_1(x) y_{H1}(x) + \cdots + \alpha_n(x) y_{Hn}(x),$$

  où les α_i sont maintenant des fonctions de x. Lorsque $n \geqslant 2$, il faut en outre imposer des contraintes sur les α_i, ce que l'on verra plus tard.

Donnons enfin un dernier "outil" pour calculer des solutions particulières (notamment pour éviter des méthodes de variation de constante qui peuvent être compliquées).

Proposition 9 : On considère deux équations différentielles linéaires avec les même coefficients :

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f_1,$$
$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f_2.$$

Si y_1 (resp. y_2) est solution de la première (resp. la deuxième) équation, alors la somme $y_1 + y_2$ est solution de l'EDO linéaire :

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f_1 + f_2.$$

En pratique, ce résultat est utile pour la recherche de solutions particulières lorsque le second membre est un peu compliqué ; plus précisément, si f peut s'écrire comme une somme $f_1 + \cdots + f_k$, alors il suffit de trouver une solution particulière pour chaque second membre f_i, et ensuite de les additionner.

§2 : Équations différentielles linéaires du premier ordre

I/ EDO linéaires à coefficients constants

La forme générique d'une EDO linéaire à coefficients constants est :

$$ay' + by = f(x),$$

où a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$. On pourra donc toujours se ramener à la résolue (en divisant par a) :

$$y' + \beta y = g(x). \tag{11}$$

Pour résoudre ce type d'équations, on applique la "recette" générique, à savoir :

1. trouver les solutions de l'équation homogène associée,
2. trouver UNE solution particulière.

Solutions homogènes

L'équation homogène associée est $y' + \beta y = 0$, et le polynôme caractéristique associé est $P(X) = X + \beta$. Ce polynôme n'a qu'une seule racine $r = -\beta$, si bien que

Proposition 10 : Les solutions de l'équation homogène associée à (11) sont les fonctions de la forme $y(x) = \lambda \exp(-\beta x)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque: *[espace vectoriel des solutions] Les solutions forment ici un espace vectoriel de dimension 1. En reprenant les notations précédentes, on peut prendre ici* $y_{H1}(x) = \exp(-\beta x)$.

Par exemple, les solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ sont les fonctions $y(x) = \lambda \exp(2x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution particulière

Illustrons la méthode de variation de la constante sur l'équation (11). Cette méthode consiste à chercher une solution particulière sous la forme : $y_P(x) = \lambda(x) \exp(-\beta x)$, où λ est une fonction inconnue. On essaie d'injecter cette fonction dans l'équation : on a alors y_P solution si et seulement si :

$$\begin{aligned}
& y_P'(x) + \beta y_P(x) = g(x),\\
\Leftrightarrow\quad & \lambda'(x)\exp(-\beta x) + \lambda(x)\left(-\beta\exp(-\beta x)\right) + \beta\left(\lambda(x)\exp(-\beta x)\right) = g(x),\\
\Leftrightarrow\quad & \lambda'(x)\exp(-\beta x) = g(x),\\
\Leftrightarrow\quad & \lambda'(x) = g(x)\exp(\beta x).
\end{aligned}$$

Ainsi, si on est capable de trouver une primitive F de $x \mapsto g(x)\exp(\beta x)$, on peut prendre $\lambda = F$. En d'autres termes, avec ces notations, on a trouvé une solution particulière $y_P(x) = F(x)\exp(-\beta x)$.

Proposition 11 : Les solutions de l'EDO (11) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = (\lambda + F(x))\exp(-\beta x),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et F est une primitive de $x \mapsto g(x)\exp(\beta x)$.
À nouveau, on rappelle que l'on peut (parfois) chercher une solution particulière sans utiliser la méthode de variation de la constante. Par exemple, on cherche à résoudre

$$y' + 3y = \exp(2x).$$

Les solutions homogènes sont de la forme $y_H(x) = \lambda\exp(-3x)$. On cherche ensuite une solution particulière. Puisque le second membre est $\exp(2x)$, on peut chercher une solution sous la forme $y_P(x) = \alpha\exp(2x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre à déterminer. Dans ces conditions, $y_P'(x) = 2\alpha\exp(2x)$, si bien que y_P est solution si et seulement si

$$\begin{aligned}
& y_P'(x) + 3y_P(x) = \exp(2x),\\
\Leftrightarrow\quad & 2\alpha\exp(2x) + 3\alpha\exp(2x) = \exp(2x),\\
\Leftrightarrow\quad & 5\alpha = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière est $y_P(x) = \frac{\exp(2x)}{5}$, et les solutions sont :

$$y(x) = \lambda\exp(-3x) + \frac{\exp(2x)}{5}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Un autre exemple, où l'on va comparer la méthode de variation de la constante et la recherche "à l'instinct" d'une solution. Soit à résoudre :

$$y' - 2y = \exp(x) + x^2 - x.$$

Les solutions homogènes sont $y_H(x) = \lambda\exp(2x)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
– *solution particulière par variation de la constante :* on cherche y_P sous la forme $y_P(x) = \lambda(x)\exp(2x)$. En réinjectant dans l'équation, on a y_P solution si et seulement si :

$$\begin{aligned}
y_P'(x) - 2y_P(x) &= \exp(x) + x^2 - x,\\
\Leftrightarrow\quad \lambda'(x)\exp(2x) &= \exp(x) + x^2 - x,\\
\Leftrightarrow\quad \lambda'(x) &= \exp(-x) + (x^2 - x)\exp(-2x).
\end{aligned}$$

Il s'agit donc de trouver une primitive de $x \mapsto \exp(-x)+(x^2-x)\exp(-2x)$. Après plusieurs intégration par parties (par exemple), on peut trouver comme primitive $-\exp(-x)-\frac{x^2}{2}\exp(-2x)$, si bien que l'on peut choisir

$$\begin{array}{rrcl} & \lambda(x) & = & -\exp(-x)-\dfrac{x^2}{2}\exp(-2x), \\ \text{i.e.} & y_P(x) & = & -\exp(x)-\dfrac{x^2}{2}, \\ \text{donc} & y(x) & = & \lambda\exp(-2x)-\exp(x)-\dfrac{x^2}{2}. \end{array}$$

– *solution particulière en inférant la forme de la solution :* on commence par découper le second membre $g(x)$ en $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$ avec

$$g_1(x)=\exp(-x), \qquad g_2(x)=x^2-x.$$

On cherche alors une solution particulière pour le second membre g_1, puis pour g_2. Pour g_1, qui est une exponentielle, on cherche une solution $y_{P1}(x)$ sous la forme $\alpha\exp(x)$, avec α à déterminer. y_{P1} est alors solution de l'équation avec second membre g_1 si et seulement si :

$$\begin{array}{rrcl} & y'_{P1}(x)-2y_{P1}(x) & = & \exp(x), \\ \Leftrightarrow & \alpha\exp(x)-2\alpha\exp(x) & = & \exp(x), \\ \Leftrightarrow & \alpha & = & -1. \end{array}$$

Ainsi, on peut prendre $y_{P1}(x)=-\exp(x)$.
On cherche ensuite y_{P2} sous la forme d'un polynôme du second degré, i.e. $y_{P2}(x)=ax^2+bx+c$, car g_2 est de cette forme. y_{P1} est alors solution de l'équation avec second membre g_1 si et seulement si :

$$\begin{array}{rrcl} & y'_{P2}(x)-2y_{P2}(x) & = & x^2-x, \\ \Leftrightarrow & 2ax+b-2\left(ax^2+bx+c\right) & = & x^2-x, \\ \Leftrightarrow & -2ax^2+(2a-2b)x+b-2c & = & x^2-x. \end{array}$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2a & = & 1 \\ 2a-2b & = & -1 \\ b-2c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{1}{2} \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, on peut prendre $y_{P2}(x)=-\frac{x^2}{2}$, ce qui donne une solution particulière à l'équation de départ :

$$y_P(x)=y_{P1}(x)+y_{P2}(x)=-\exp(x)-\frac{x^2}{2}.$$

Il n'est pas toujours facile de deviner a priori la forme d'une solution particulière, mais lorsque cela est possible, cela permet (en principe) de rendre les calculs un peu plus faciles.

Exercice : Résoudre les équations différentielles :

$$\begin{aligned} y' + y &= x, \\ 2y' - 3y &= 1, \\ y' + 5y &= \exp(5x). \end{aligned}$$

II/ Équations différentielles linéaires à coefficients non constants

Une EDO linéaire est de la forme :

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \tag{12}$$

On se place alors sur un intervalle I sur lequel a_1 ne s'annule pas, ce qui permet alors de se ramener à l'équation (en divisant par a_1) :

$$y' + b(x)y = g(x). \tag{13}$$

Encore une fois, on peut appliquer la méthode générique : trouver les solutions homogènes, puis une solution particulière.

Solutions homogènes

L'équation homogène s'écrit

$$y' + b(x)y = 0.$$

Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions de la forme :

$$y_H(x) = \lambda \exp(-B(x)), \tag{14}$$

où λ est un réel et B est une primitive de b sur I (notons que B existe puisque b est continue). Pour comprendre d'où vient cette formule, essayons de faire des calculs sans se soucier de leur validité pour le moment. En divisant l'équation homogène par y, on obtient l'équation

$$\frac{y'}{y} = -b(x).$$

On introduit B une primitive de b sur I. Une primitive de $\frac{y'}{y}$ est $\ln(y)$, si bien que l'on a :

$$\ln(y(x)) = -B(x) + K,$$

avec K une constante (cela vient du fait que deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante). Prenons l'exponentielle dans la relation précédente, ce qui donne

$$y(x) = \exp(K)\exp(-B(x)),$$

et donc y est bien de la forme (14). Autrement dit, le produit $y(x)\exp(B(x))$ semble être constant. Si maintenant on pose $z(x) = y(x)\exp(B(x))$, alors, en dérivant, on obtient bien $z'(x) = 0$, et donc le résultat voulu.

Proposition 12 : Les solutions de l'équation homogène $y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions (définies sur l'intervalle I), de la forme

$$y_H(x) = \lambda \exp(-B(x)),$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et B est une primitive de b sur I.

Une solution particulière

On va appliquer la méthode dite de la *variation de la constante.* Cette méthode consiste en la recherche d'une solution particulière de l'équation, sous la forme :

$$y_P(x) = \lambda(x) y_H(x),$$

où y_H est une solution homogène. Par exemple, prenons ici une solution homogène $y_H(x) = \exp(-B(x))$. Il nous reste alors à trouver $\lambda(x)$. Alors $y_P(x) = \lambda(x)y_H(x)$ est solution de l'EDO si et seulement si :

$$\begin{aligned}
& & y_P'(x) + b(x)y_P(x) = f(x),\\
&\Leftrightarrow & \lambda'(x)y_H(x) + \lambda(x)y_H'(x) + b(x)\lambda(x)y_H(x) = f(x),\\
&\Leftrightarrow & \lambda'(x)y_H(x) = f(x)
\end{aligned}$$

car y_H est solution de l'équation homogène. Dans notre cas, $y_H(x) = \exp(-B(x))$, ce qui donne $\lambda'(x) = f(x)\exp(B(x))$. La fonction $x \mapsto f(x)\exp(B(x))$ est continue sur I, donc on peut lui trouver une primitive, disons F, qui peut servir pour $\lambda(x)$.

Proposition 13 : Les solutions de l'équation différentielle $y' + b(x)y = f(x)$ sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = (\lambda + F(x)) \exp(-B(x)),$$

où λ est un réel, B une primitive de b sur I, et F une primitive de $x \mapsto f(x)\exp(B(x))$.

On peut donc noter deux possibilités pour résoudre une EDO linéaire d'ordre 1 :
- on apprend cette formule, et on se ramène juste au calcul de 2 primitives,
- on connaît les solutions homogènes (via un calcul de primitives), et on cherche une solution particulière.

On privilégiera la seconde approche, notamment car la recherche d'une solution particulière peut parfois être plus simple que la recherche de la primitive.

Exercice : Résoudre les équations différentielles (en précisant les intervalles sur lesquels l'équation est résolue) :

$$\begin{aligned}
xy' + y &= 0,\\
\sin(x)y' - \cos(x)y &= 0,\\
y' + \exp(x)y &= \exp(x).
\end{aligned}$$

Remarque: *Comme pour les EDO linéaires à coefficients constants, on peut parfois essayer de trouver des solutions particulières "à l'instinct", en devinant la forme de la solution particulière.*

Exercice : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' + y &=& 1,\\ y(0) &=& 0. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y' - 2y &=& \exp(x),\\ y(1) &=& 1. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2y' + 3y &=& x^2,\\ y(-1) &=& -2. \end{array}\right.$$

§3 : Équations différentielles non linéaires

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement à des équations sous forme résolue, i.e. des équations de la forme

$$y' = \Psi(x, y).$$

Selon la forme de la fonction Ψ, on peut faire des calculs et trouver des solutions, ou tout au moins donner des propriétés des solutions.

I/ Les EDO séparables

Généralités

On entre maintenant dans le cas d'EDO qui ne sont plus linéaires. En particulier, notons que le principe de superposition n'est PLUS valable. La méthode générique ne marche plus, et il faut trouver d'autres approches.

Définition 14 : On appelle *EDO séparable* toute équation différentielle de la forme :

$$y' = h(x)F(y(x)). \tag{15}$$

Remarque: *Lorsque* $h(x) = 1$, *on parle aussi d'équations autonomes.*

On considérera dans cette partie que h et F sont des fonctions continues. Dans toute la suite, on considérera que les problèmes de Cauchy ont bien une unique solution (attention toutefois à l'intervalle de définition). Donnons quelques propriétés générales sur les équations séparables.

Proposition 15 : Soit $x_0 \in I$ tel que $F(x_0) = 0$. Alors la fonction constante $y(x) = x_0$ est une solution de l'équation différentielle (15).

Ce résultat est immédiat puisque par hypothèse $F(y) = F(x_0) = 0$ et que la dérivée d'une constante est nulle.

Grâce à l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy, on peut obtenir la chose suivante (à retenir)

Théorème 16 : Soit y une solution de l'équation différentielle séparable $y' = h(x)F(y(x))$. Il n'y a que 2 possibilités :

1. soit y est constante, égale à une valeur $y_0 \in \mathbb{R}$, auquel cas $F(y_0) = 0$,
2. soit $F \circ y$ ne s'annule pas sur l'ensemble de définition de y.

Preuve : S'il existe x_0 tel que $F \circ y_0(x_0) = 0$, alors on introduit la fonction y_1 constante définie par $y_1(x) = y_0(x_0)$. Comme $F(y_0(x_0)) = 0$, y_1 est aussi une solution de l'équation différentielle. Ainsi, y_0 et y_1 sont toutes les deux solutions du même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= h(x)F(y), \\ y(x_0) &= y_0(x_0) \end{cases}$$

L'unicité d'une telle solution assure que $y_0 = y_1$, donc y_0 est une solution constante. □

Méthodes de résolution

Grâce au théorème 16, on a une méthode pour résoudre une équation séparable.

1. On commence par chercher toutes les solutions constantes, i.e. on cherche tous les $z \in \mathbb{R}$ tels que $F(z) = 0$.

2. On cherche les solutions y telles que $F \circ y$ ne s'annule pas.

Il n'y a pas de méthode génériques pour trouver les solutions constantes, cela se fera au cas par cas. Pour les solutions telles que $F \circ y$ ne s'annule pas, on peut remarquer que :

$$y' = h(x)F(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{y'}{F(y)} = h(x).$$

Soit alors G (resp. H) une primitive de $\frac{1}{F}$ (resp. h). L'équation différentielle se réécrit alors

$$(G \circ y)' = H'(x),$$

Les solutions vérifient alors :

$$G(y(x)) = H(x) + K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Arrivés à ce stade, il faut pouvoir écrire y en fonction de x, ce qui ne sera pas toujours facile, ni forcément possible.

Théorème 17 : On considère l'équation différentielle $y' = h(x)F(y)$, et on note G (resp. H) une primitive de $\frac{1}{F}$ (resp. h). Alors les solutions non constantes à l'EDO vérifient :

$$G(y(x)) = H(x) + K,$$

pour un certain $K \in \mathbb{R}$.

Un petit exemple d'illustration. On veut résoudre l'équation différentielle

$$y' = \exp(-y).$$

Ici, il n'y a pas de solution constante (car une exponentielle est toujours positive). Déterminons maintenant les solutions non constantes. Soit y une telle solution : on obtient :

$$y' \exp(y) = 1.$$

Avec les notations précédentes, on remarque que $\frac{1}{F} = \exp$, si bien que l'on peut prendre $G = \exp$. Il s'en suit

$$\exp(y(x)) = x + K$$

pour un certain $K \in \mathbb{R}$. On est ici dans un cas "gentil", puisque l'on peut écrire y en prenant le logarithme de l'égalité précédente. On obtient alors :

$$y(x) = \ln(x + K)$$

et on se rend compte que y est définie uniquement sur $]-K; +\infty[$. On peut alors affirmer que les solutions de l'équation différentielle $y' = \exp(-y)$ sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = \ln(x + K), \qquad x \in]-K; +\infty[, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Exercice : Donner toutes les solutions de l'équation

$$y' = y \ln(y).$$

Préciser celle qui vérifie $y(0) = \frac{1}{2}$.

Terminons par un exemple où $h(x) \neq 1$, et cherchons les solutions de l'équation

$$y' = \frac{y^2}{x^3}.$$

C'est bien une équation séparable avec $F(X) = X^2$ et $h(x) = \frac{1}{x^3}$. La seule solution constante est $y_0(x) = 0$. Pour les autres solutions, on cherche G et H, primitives respectives de $\frac{1}{F}$ et h. On peut prendre

$$G(x) = -\frac{1}{x}, \qquad H(x) = -\frac{1}{2x^2}.$$

Il s'en suit que :

$$\frac{-1}{y(x)} = \frac{-1}{2x^2} + K,$$

pour un certain $K \in \mathbb{R}$. On peut alors (par chance !) écrire :

$$y(x) = \frac{2x^2}{1 - 2Kx^2}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

On remarquera une fois encore que l'intervalle de définition de ces solutions dépend de K.

II/ Changement de fonction

Certaines équations différentielles peuvent être résolues en faisant un changement de fonction inconnue. Cette méthode n'est pas systématique, car il n'est pas aisé de savoir s'il faut en faire un, et si oui, quel est le changement de fonction approprié. Cette partie sera donc uniquement une présentation d'exemples.

Essayons de résoudre l'équation différentielle :

$$y' = 2 + (y - x)^2.$$

Cette équation n'est ni linéaire, ni séparable. Cependant, on peut remarquer qu'elle peut se réécrire sous la forme $y' - 1 = 1 + (y - x)^2$. On peut alors faire le changement de fonction $z = y - x$. On cherche une équation différentielle vérifiée par z. On peut calculer :

$$z' = y' - 1 = 1 + (y - x)^2 = 1 + z^2.$$

Ainsi, on est ramené à l'équation autonome sur z : $z' = 1 + z^2$. Cette équation n'a pas de solution constante, et on peut identifier (avec les notations précédentes) $F(X) = 1 + X^2$. Une primitive de $\frac{1}{F}$ est alors arctan, si bien que z vérifie

$$\arctan(z(x)) = x + K,$$

pour un $K \in \mathbb{R}$. On peut alors en déduire que

$$\begin{aligned} z(x) &= \tan(x + K) \qquad \text{valable pour } x \in \left]-K + \frac{\pi}{2} + n\pi; -K + \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right[, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ y(x) &= x + \tan(x + K) \qquad \text{valable pour } x \in \left]-K + \frac{\pi}{2} + n\pi; -K + \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right[, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donnons un deuxième exemple avec un cas particulier d'équation de Bernoulli[6] :

$$y' = \frac{2}{x} y - x^2 y^2.$$

6. Jacques Bernoulli (1654-1705), mathématicien et physicien suisse

Encore une fois, cette équation n'est ni linéaire, ni séparable. On peut remarquer que la fonction nulle est solution. On s'attend à ce que les autres solutions ne s'annulent pas, si bien que l'on peut faire le changement de fonction $z = \frac{1}{y}$. On cherche alors une équation différentielle vérifiée par z. On trouve :

$$z' = \frac{-y'}{y^2} = \frac{-1}{y^2}\left(\frac{2}{x}y - x^2y^2\right) = \frac{-2}{xy} + x^2 = \frac{-2}{x}z + x^2.$$

Ainsi, z vérifie l'EDO linéaire $z' + \frac{2}{x}z = x^2$. On peut utiliser la méthode habituelle, à savoir chercher les solutions homogènes puis une solution particulière.

1. Solutions homogènes : ici, la fonction $b(x)$ dans (13) est $b(x) = \frac{2}{x}$, dont une primitive est $x \mapsto 2\ln x$. Ainsi, les solutions homogènes sont de la forme :

$$z_H(x) = \frac{\lambda}{x^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Solution particulière : on cherche ici une solution particulière sous la forme $z_P(x) = \alpha x^3$. En réinjectant dans l'équation, on a nécessairement : $3\alpha + 2\alpha = 1$, ce qui donne $\alpha = \frac{1}{5}$, et donc $z_P(x) = \frac{x^3}{5}$.

On peut écrire la forme générale pour z et pour y :

$$z(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x^3}{5}, \qquad\qquad y(x) = \frac{5x^2}{5\lambda + x^5}.$$

Terminons cette partie par un dernier exemple : soit à résoudre l'EDO

$$y' = y\left(x - \ln(y)\right).$$

Cette équation n'est ni linéaire, ni séparable. A priori, une solution de cette équation doit être strictement positive, pour que le terme $\ln(y)$ soit bien défini. En particulier, une telle solution ne s'annule pas, si bien que l'on peut réécrire l'équation en :

$$\frac{y'}{y} = x - \ln(y) \qquad \Longleftrightarrow \frac{y'}{y} + \ln(y) = x.$$

On peut faire le changement de fonction $z = \ln(y)$, ce qui donne :

$$z' + z = x.$$

Cette équation est beaucoup plus simple à résoudre. Les solutions homogènes sont

$$z_H(x) = \lambda \exp(-x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $z_P(x) = ax + b$. En l'injectant dans l'équation, on doit alors avoir :

$$a + (ax + b) = x,$$

ce qui donne $a = 1$ et $b = -1$, et donc $z_P(x) = x - 1$. Ainsi, les solutions sont données par :

$$z(x) = x - 1 + \lambda \exp(-x), \qquad \text{i.e.} \qquad y(x) = \exp\left(x - 1 + \lambda \exp(-x)\right),$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

§4 : Équations différentielles linéaires à coefficients constants du deuxième ordre

Une EDO linéaire à coefficients constants est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + c = f(x), \tag{16}$$

où a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$, et f est une fonction continue sur un intervalle I. En appliquant la théorie générale sur les EDO linéaires, on a le résultat suivant :

Proposition 18 : Les solutions de (16) sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = \alpha y_{H1}(x) + \beta y_{H2}(x) + y_P(x),$$

où y_P est une solution particulière, et y_{H1}, y_{H2} sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée.
En clair, pour résoudre (16), on cherche les solutions homogènes puis les solutions particulières.
On rappelle également que le polynôme caractéristique de l'EDO (16) est donné par :

$$P(X) = aX^2 + bX + c.$$

Dans la suite, on s'attache à donner les techniques de calcul des solutions homogènes et particulières.

I/ Résolution de l'équation homogène

Les solutions de l'équation homogène sont données grâce au polynôme caractéristique. On retiendra le résultat suivant

Théorème 19 : On cherche les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation (16). Il y a trois possibilités :

1. si P admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$y_H(x) = \alpha \exp(r_1 x) + \beta \exp(r_2 x), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

2. si P admet une racine double $r \in \mathbb{R}$, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$y_H(x) = (\alpha x + \beta) \exp(rx), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

3. si P admet deux racines complexes conjuguées de forme algébrique $r_\pm = \lambda \pm i\omega$, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$y_H(x) = \exp(\lambda x) \left(\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)\right), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le théorème précédent donne donc toutes les possibilités pour les équations homogènes. Donnons quelques exemples :

1. pour l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$, le polynôme caractéristique associé est $X^2 - 3X + 2$. Ce polynôme a deux racines réelles distinctes, $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, donc les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$y_H(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. pour l'équation $4y'' - 4y' + 1 = 0$, le polynôme caractéristique associé est $4X^2 - 4X + 1$. Ce polynôme a une racine double $r = \frac{1}{2}$, donc les solutions de $4y'' - 4y' + 1 = 0$ sont les fonctions de la forme
$$y_H(x) = (\alpha x + \beta)\, e^{\frac{x}{2}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
3. pour l'équation $y'' - 4y' + 5y = 0$, le polynôme caractéristique associé est $X^2 - 4X + 5$. Ce polynôme admet deux racines complexes conjuguées, $r_1 = 2 + i$ et $r_2 = 2 - i$, donc les solutions de $y'' - 4y' + 5y = 0$ sont les fonctions de la forme
$$y_H(x) = \alpha e^{2x}\cos(x) + \beta e^{2x}\sin(x), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exercice : Vérifier dans chaque cas que les fonctions proposées sont bien des solutions.

Exercice : Pour chacune des équations différentielles, donner l'ensemble des solutions (vérifier que les fonctions trouvées sont solutions) et donner celle qui vérifie en outre $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
$$\begin{aligned} y'' + 2y &= 0, \\ y'' - 2y' + y &= 0, \\ y'' - 5y' + 6y &= 0. \end{aligned}$$

II/ Recherche d'une solution particulière

Dans cette partie, on présente la méthode de variation de la constante pour une EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, ainsi que d'autres méthodes "instinctives" de recherche d'une solution particulière. Commençons par un cas général, et considérons l'équation
$$ay'' + by' + cy = f(x).$$
Évidemment, les solutions homogènes dépendent des racines du polynôme caractéristique. On peut néanmoins noter y_{H1}, y_{H2} une base des solutions homogènes. Cela signifie que y_{H1} et y_{H2} sont solutions de l'équation hommogène et que toute autre solution de l'équation homogène s'écrit sous la forme
$$y_H(x) = \alpha y_{H1}(x) + \beta y_{H2}(x),$$
avec des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
La méthode de variation des constantes consiste alors en la recherche d'une solution particulière sous la forme :
$$y_P(x) = \alpha(x) y_{H1}(x) + \beta(x) y_{H2}(x),$$
où α et β sont maintenant deux fonctions réelles, pour lesquelles on requiert la condition supplémentaire suivante :
$$\alpha'(x) y_{H1}(x) + \beta'(x) y_{H2}(x) = 0. \tag{17}$$

Remarque: *Cette contrainte supplémentaire ne sort pas d'un chapeau, mais son explication n'entre pas dans le cadre de ces notes de cours.*
Avec la contrainte (17), on peut essayer de réinjecter y_P dans l'équation. On a :
$$\begin{aligned} &y_P(x) = \alpha(x) y_{H1}(x) + \beta(x) y_{H2}(x) \\ &y_P'(x) = \alpha'(x) y_{H1}(x) + \alpha(x) y_{H1}'(x) + \beta'(x) y_{H2}(x) + \beta(x) y_{H2}'(x) = \alpha(x) y_{H1}'(x) + \beta(x) y_{H2}'(x) \\ &y_P''(x) = \alpha'(x) y_{H1}'(x) + \beta'(x) y_{H2}'(x) + \alpha(x) y_{H1}''(x) + \beta(x) y_{H2}''(x) \end{aligned}$$

En réinjectant dans l'équation de départ, on obtient :

$$\begin{aligned} ay_P''(x) + by_P'(x) + cy(x) = (\cdots) &= a\left(\alpha'(x)y_{H1}'(x) + \beta'(x)y_{H2}'(x)\right) \\ &+ \alpha(x)\left(ay_{H1}''(x) + by_{H1}'(x) + cy_{H1}(x)\right) \\ &+ \beta(x)\left(ay_{H2}''(x) + by_{H2}'(x) + cy_{H2}(x)\right) \\ &= a\left(\alpha'(x)y_{H1}'(x) + \beta'(x)y_{H2}'(x)\right) \end{aligned}$$

car y_{H1} et y_{H2} sont des solutions homogènes.

Exercice : Vérifier le calcul précédent.

Il s'en suit que y_P est solution de l'équation si et seulement si

$$a\left(\alpha'(x)y_{H1}'(x) + \beta'(x)y_{H2}'(x)\right) = f(x).$$

En utilisant cette équation ainsi que la contrainte (17), on obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha'(x)y_{H1}(x) + \beta'(x)y_{H2}(x) & = & 0 \\ \alpha'(x)y_{H1}'(x) + \beta'(x)y_{H2}'(x) & = & f(x) \end{cases}$$

dont les inconnues sont $\alpha'(x)$ et $\beta'(x)$. Une fois ce système résolu, on peut trouver des solutions pour α et β.

Passons à un exemple concret, et résolvons l'équation

$$y'' - y = e^{2x}.$$

Le polynôme caractéristique est ici $X^2 - 1$, dont les racines sont 1 et -1. Ainsi, les solutions homogènes sont de la forme :

$$y_H(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{x}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Avec les notations précédentes, on a $y_{H1}(x) = e^{-x}$ et $y_{H2}(x) = e^{x}$. On cherche maintenant une solution particulière, sous la forme :

$$\begin{aligned} & y_P(x) = \alpha(x)e^{-x} + \beta(x)e^{x} \\ \text{avec la contrainte} \quad & \alpha'(x)e^{-x} + \beta'(x)e^{x} = 0. \end{aligned}$$

On va réinjecter cette solution dans l'équation. On a :

$$\begin{aligned} & y_P(x) = \alpha(x)e^{-x} + \beta(x)e^{x}, \\ & y_P'(x) = -\alpha(x)e^{-x} + \beta(x)e^{x}, \\ & y_P''(x) = -\alpha'(x)e^{-x} + \alpha(x)e^{-x} + \beta'(x)e^{x} + \beta(x)e^{x}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} y_P''(x) - y_P(x) &= -\alpha'(x)e^{-x} + \alpha(x)e^{-x} + \beta'(x)e^{x} + \beta(x)e^{x} - \alpha(x)e^{-x} - \beta(x)e^{x} \\ &= -\alpha'(x)e^{-x} + \beta'(x)e^{x}. \end{aligned}$$

Ainsi, y_P est solution de $y'' - y = e^{2x}$ si et seulement si :

$$-\alpha'(x)e^{-x} + \beta'(x)e^{x} = e^{2x}.$$

On aboutit donc au système suivant sur α' et β' :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha'(x)e^{-x}+\beta'(x)e^{x} &=& 0 \\ -\alpha'(x)e^{-x}+\beta'(x)e^{x} &=& e^{2x} \end{array}\right.$$

En sommant ou en retranchant les lignes de ce système, on aboutit à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\beta'(x)e^{x} &=& e^{2x} \\ 2\alpha'(x)e^{-x} &=& -e^{2x} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \beta'(x) &=& \frac{e^{x}}{2} \\ \alpha'(x) &=& \frac{-e^{3x}}{2} \end{array}\right.$$

On peut alors prendre

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta(x) &=& \frac{e^{x}}{2} \\ \alpha(x) &=& \frac{-e^{3x}}{6} \end{array}\right. \qquad \text{i.e.} \qquad y_P(x)=\frac{-e^{3x}}{6}e^{-x}+\frac{e^{x}}{2}e^{x}=\frac{-1}{6}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{2x}=\frac{1}{3}e^{x}.$$

Une solution particulière de $y''-y=e^{2x}$ est donc $y_P(x)=\frac{1}{3}e^{2x}$. Ainsi, les solutions de l'équation $y''-y=e^{2x}$ sont les fonctions de la forme :

$$y(x)=\frac{1}{3}e^{2x}+\alpha e^{-x}+\beta e^{x}, \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Exercice : En utilisant la méthode de variation des constantes, donner une solution particulière de

$$y''-y=e^{-x}.$$

S'il est important de connaître cette méthode, il est recommandé d'essayer de l'éviter, car les calculs peuvent s'avérer fastidieux. Par exemple,

1. si f est un polynôme, on peut essayer de trouver y_P sous la forme d'un polynôme,
2. si f est de la forme e^{ax}, on peut essayer de trouver y_P sous la forme αe^{ax}, avec $\alpha\in\mathbb{R}$,
3. plus généralement, si f est un produit $P(x)e^{ax}$ avec P un polynôme, on peut chercher y_P sous la forme $Q(x)e^{ax}$, avec Q un autre polynôme,
4. si f est une combinaison linéaire de sinus et cosinus, on peut chercher y_P sous la forme d'une combinaison linéaire de sinus et cosinus.

À titre d'exemple, reprenons l'équation $y''-y=e^{2x}$ et cherchons une solution particulière. Le second membre est e^{2x}, si bien que l'on cherche $y_P(x)$ sous la forme

$$y_P(x)=\alpha e^{2x}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Il s'en suit que $y_P''(x)=4\alpha e^{2x}$, si bien que :

$$y_P''(x)-y_P(x)=e^{2x} \iff 4\alpha e^{2x}-\alpha e^{2x}=e^{2x} \iff 3\alpha=1.$$

On trouve alors $\alpha=\frac{1}{3}$, et $y_P(x)=\frac{1}{3}e^{2x}$. On retrouve la solution particulière calculée par la méthode de variation de la constante, mais de manière plus facile.

Remarque: *Lors de la recherche d'une solution particulière par méthode intuitive, il peut arriver que l'on n'aboutisse pas. Il faut alors soit changer la forme de la solution que l'on cherche, soit utiliser la méthode de variation de la constante.*

Un autre exemple, sur l'équation $y'' - y = e^{-x}$. On cherche une solution particulière, de manière intuitive : le second membre étant e^{-x}, on cherche y_P sous la forme

$$y_P(x) = \alpha e^{-x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ici, cela donne $y_P''(x) = \alpha e^{-x}$ si bien que $y_P''(x) - y_P(x) = 0$. Il s'en suit que la forme cherchée ne donne pas de solution. Pour s'en sortir, on remarque que e^{-x} est de la forme $P(x)e^{ax}$, avec $a = -1$ et $P(x) = 1$ un polynôme. On cherche alors plutôt y_P sous la forme

$$y_P(x) = Q(x)e^{-x},$$

avec Q un polynôme. Essayons avec un polynôme de degré 1, $Q(x) = \alpha x + \beta$. On cherche donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $y_P(x) := (\alpha x + \beta)\, e^{-x}$ soit solution de $y'' - y = e^{-x}$. Avec cette forme, on obtient :

$$\begin{aligned} y_P''(x) &= (\alpha x + \beta - 2\alpha)\, e^{-x} \\ y_P''(x) - y_P(x) &= -2\alpha e^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi, y_P est solution si $-2\alpha = 1$, et on n'a pas de condition sur β. En prenant $\beta = 0$, cela donne un candidat :

$$y_P(x) = -\frac{x}{2}e^{-x}$$

dont on peut vérifier qu'il est bien une solution particulière de l'équation.

Exercice : Sans utiliser la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière pour les EDO suivantes :

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= x^2 - x \\ 2y'' + 3y' + 8y &= \cos(2x) \\ y'' + 4y &= e^{-2x} \\ y'' + 4y &= \sin(x) \\ y'' + 4y &= 3e^{-2x} - \sin(x) \end{aligned}$$

§5 : À retenir

1. Calcul des solutions homogènes pour une EDO linéaire à coefficients constants (ordre 1 ou 2),
2. Recherche intuitive d'une solution particulière,
3. Variation de la constante, pour les EDO linéaires d'ordre 1 ou les EDO linéaires à coefficients constants d'ordre 2,
4. Savoir intégrer une équation séparable,
5. Résoudre une EDO par un changement de fonction (éventuellement donné),
6. Utiliser les méthodes ci-dessus pour résoudre un problème de Cauchy.