Chapitre 3

Calculs d'intégrales et de primitives

Plan du cours

7 sept. 2015

Motivation : calcul de l'aire délimitée par une courbe. Sur la figure 10, on veut essayer de calculer l'aire de la zone colorée. Une idée naturelle consiste à approcher cette aire par la somme des aires de certains rectangles bien choisis, et donne lieu à la notion de sommes de Riemann. L'aire alors calculée est appelée intégrale, et on verra comment calculer ce genre de quantités.

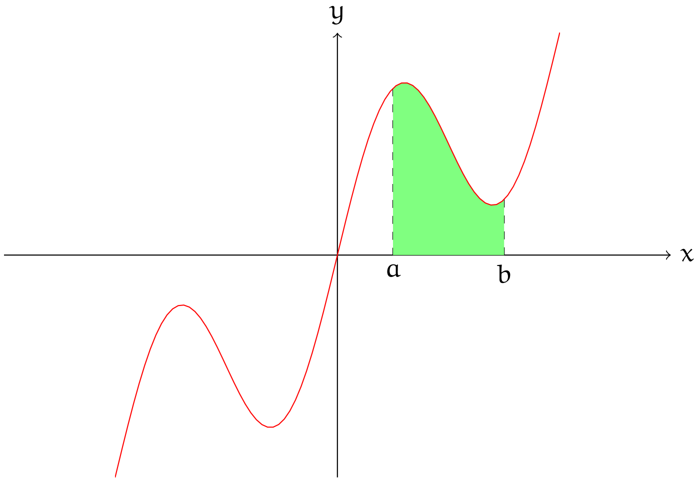

FIGURE 10 – Comment calculer l'aire délimitée par le graphe d'une fonction ?

Dans ce cours, on ne s'intéressera qu'à ce qu'on appelle des intégrales "définies", c'est-à-dire qu'on ne considérera que des fonctions définies sur des intervalles fermés.

§1 : Intégrale et aire algébrique : sommes de Riemann

On part d'une fonction f définie sur $[a; b]$, et on prend $n \in \mathbb{N}^*$. On décompose alors l'intervalle $[a; b]$ en n morceaux, intervalles de taille $\dfrac{b-a}{n}$. On introduit donc les nombres

$$x_k := a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

Sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$, on approche l'aire délimitée par la courbe par l'aire du rectangle de hauteur $f(x_k)$, cf. figure 11, et on crée ainsi la somme de Riemann S_n définie par :

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n}.$$

<u>Définition 1 :</u> *(Intégrale définie)* Si la suite S_n a une limite finie quand $n \to +\infty$, on appelle cette limite *intégrale de* f *sur* $[a; b]$, et on note

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Remarque: *De façon plus précise, l'intégrale représente l'aire algébrique délimitée par la courbe, i.e. l'aire de la portion délimitée par la courbe au dessus de l'axe des ordonnées MOINS l'aire de la portion délimitée par la courbe en dessous de l'axe des ordonnées, cf. figure 12.*

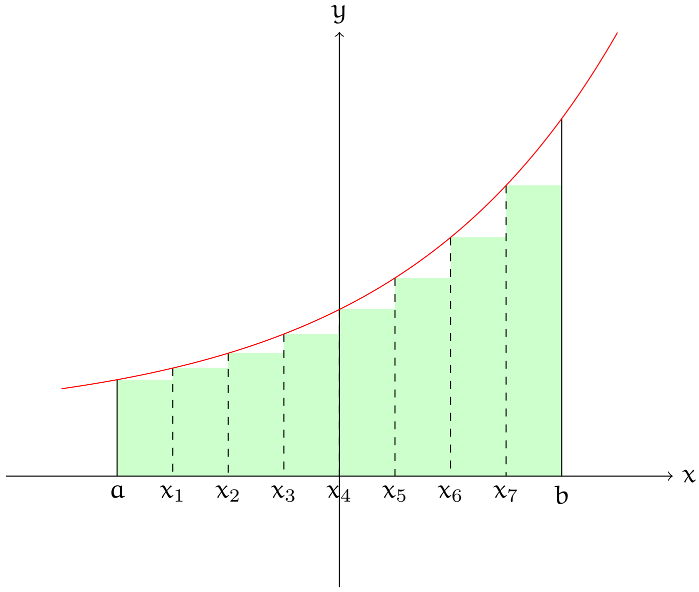

FIGURE 11 – Interprétation graphique d'une somme de Riemann (exemple avec $n = 8$) : sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$, on remplace l'aire sous la courbe par l'aire du rectangle de base $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(x_k)$. La somme de Riemann correspond alors à l'aire de la zone en vert.

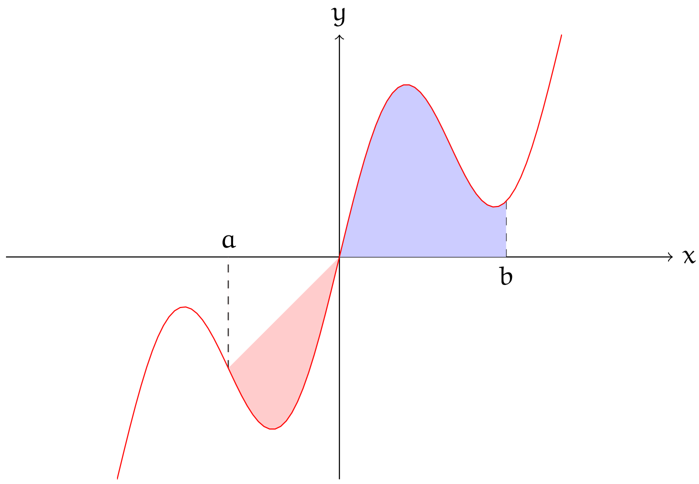

FIGURE 12 – Interprétation graphique d'une intégrale. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ Aire(bleu) - Aire(rouge).

Exercice : On veut calculer $I = \int_0^1 x\,dx$.

-i- Expliquer graphiquement pourquoi $I = \frac{1}{2}$.

-ii- Pour $n \in \mathbb{N}$ non nul, donner l'expression de la somme de Riemann S_n correspondante, et montrer que

$$S_n = \frac{n-1}{2n}.$$

-iii- En déduire que l'on a bien :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2} = I.$$

Comme le suggère l'exercice précédent, il peut être délicat de calculer une intégrale uniquement grâce aux sommes de Riemann. On va voir dans le chapitre suivant le lien entre intégrales et primitives, qui seront utiles par la suite. Avant cela, quelques propriétés qui peuvent se comprendre graphiquement : pour f et g définies sur un intervalle $[a;b]$, $c \in [a;b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx &= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx,\\
\int_a^b (\lambda f(x))\ dx &= \lambda \int_a^b f(x)\ dx,\\
\int_a^a f(x)\ dx &= 0,\\
\int_a^b f(x)\ dx &= \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \qquad \text{(Relation de Chasles).}
\end{aligned}$$

Les deux premières équations traduisent la linéarité de l'intégrale. Notons encore la relation suivante

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx, \tag{1}$$

moins intuitive. Il peut paraître étonnant de vouloir inverser les bornes dans une intégrale, mais on va voir que cette relation est cohérente avec les calculs qu'on veut en faire.

Proposition 2 : (quelques identités utiles) Soient f une fonction définie sur un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et a, b deux réels.

1. Si f est paire, alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$,
2. Si f est impaire, alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\ dx = 0$,
3. Si f est $T-$périodique, alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\ dx &= \int_{a+T}^{b+T} f(x)\ dx,\\
\int_0^T f(x)\ dx &= \int_a^{a+T} f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Cette proposition n'est pas prouvée ici, mais on peut l'appréhender au moins graphiquement :
- le résultat sur les fonctions paires traduit le fait que la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,
- le résultat sur les fonctions impaires traduit le fait que la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine,

§2 : Liens entre intégrales et primitives

Définition 3 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitive* de f toute fonction F définie et dérivable sur I, et telle que, pour $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Par exemple, la fonction $F(x) = x^2$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2x$.

Remarque: *On désignera parfois une primitive de* f *par* $\int f(x)\, dx$.

Proposition 4 : Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors $F - G$ est constante, i.e. il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$,

$$F(x) = G(x) + K.$$

Proposition 5 : Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I, alors elle y admet une primitive F.

Remarque: *Attention, ce résultat n'est qu'une implication. Il existe des fonctions non continues qui admettent des primitives.*

Exercice : On considère $f(x) = |x|$. Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Prendre la primitive d'une fonction est une opération "inverse" à la dérivation. Il s'en suit un certain nombre de règles assez évidentes : par exemple, on considère f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, qui admettent comme primitives respectives F et G. On prend également $\lambda \in \mathbb{R}$: on a alors

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- λF est une primitive de λf.

Par ailleurs, si l'on doit connaître les dérivées usuelles, il est de bon ton de connaître également les primitives usuelles (i.e. les tableaux donnés dans le chapitre 2, à l'envers). On les rappelle dans ce chapitre.

Exercice : (composition par des fonctions affines) En utilisant les primitives usuelles (tableau 3) et les primitives de composées (tableau 4), compléter le tableau suivant (pour a, b des nombres réels non nuls et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$) :

$f(x)$	$\int f(x)\, dx$	Intervalles	$f(x)$	$\int f(x)\, dx$	Intervalles
$\exp(ax)$			$\dfrac{1}{1+x}$		
$(x-a)^n$			$\dfrac{1}{x-a}$		
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$			$\dfrac{1}{a^2+(x-b)^2}$		
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$			$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$		

Passons maintenant au lien entre primitives et intégrales.

Théorème 6 : Soit f définie et continue sur un intervalle $[a; b]$. On note F une primitive de f. Alors,

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	intervalles acceptables
$x^m, \quad m \neq -1$	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + K$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + K$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\exp(x)$	$\exp(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\,(\ln(x) - 1) + K$	$]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$x^\alpha := \exp(\alpha\ln(x)), \quad \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0;+\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + K$	$\left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x)) + K$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + K$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + K$	$]-1;1[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + K$	$]-\infty;-1[$ ou $]-1;1[$ ou $]1;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{argsh}(x) + K = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + K$	$\mathbb{R}$

TABLE 3 – Primitives usuelles

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$u'(x)u(x)^n$	$\dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1}+K$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)^n},\ n\neq 1$	$\dfrac{-1}{(n-1)u(x)^{n-1}}+K$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)+K$	$u'(x)\exp(u(x))$	$\exp(u(x))+K$
$u'(x)u(x)^\alpha,\quad \alpha\neq -1$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+K$	$u'(x)\sqrt{u(x)}$	$2\sqrt{u(x)}+K$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))+K$	$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))+K$
$u'(x)\tan(u(x))$	$-\ln(\lvert\cos(u(x))\rvert)+K$	$\dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$	$\tan(u(x))+K$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$	$\arcsin(u(x))+K$	$\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	$\arctan(u(x))+K$

TABLE 4 – Primitives de composées. u est une fonction dérivable sur un intervalle I. Ces formules sont valables sur les intervalles sur lesquels la primitive a un sens. Ce tableau n'est évidemment pas exhaustif.

Remarque: *On notera souvent* $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$.
Ce résultat n'est pas intuitif, mais il est proposé (dans un cas particulier) dans la fiche d'exercices. Il est admis ici, et on remarquera qu'il est bien cohérent avec l'égalité 1. Un dernier résultat sur le lien entre intégrales et primitives.

Théorème 7 : Soit f définie sur un intervalle $[a;b]$. Pour $x \in [a;b]$, on peut définir une fonction F par

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

Alors F est la primitive de f qui s'annule en a.

Preuve : Il y a trois choses à montrer :

1. F est une primitive de f,
2. $F(a) = 0$,
3. F est la seule primitive de f qui vérifie $F(a) = 0$.

1. Puisqu'on a admis le théorème 6, on peut l'utiliser, et on note G une primitive de f sur $[a;b]$. Alors pour tout $x \in [a;b]$, G est encore une primitive de f sur $[a;x]$, si bien que

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a),$$

En d'autres termes, pour tout x, on a $F(x) = G(x) - G(a)$. Puisque G est une primitive de f et que $G(a)$ est une constante, on en déduit que F est aussi une primitive de f.

2. L'égalité $F(x) = G(x) - G(a)$ est valable pour tout $x \in [a; b]$. En l'utilisant avec $x = a$, on obtient $F(a) = 0$.

3. Prenons maintenant H une primitive de f qui s'annule en a. Comme F et H sont deux primitives de f, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [a; b]$,

$$F(x) = H(x) + K.$$

En appliquant cette égalité pour $x = a$, on obtient $K = 0$, si bien que $F = H$. Ainsi, F est bien la seule primitive de f qui s'annule en a.

□

Exercice :

-i- Donner une primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1; 4]$. En déduire la valeur de

$$\int_1^4 \frac{dx}{x},$$

-ii- Quelle est la primitive de $g(x) = \exp(x)$ qui s'annule en 0 ?

§3 : Méthodes de calcul d'une intégrale

Ce chapitre est le plus long du cours, car il présente différentes méthodes de calcul d'intégrales (ou de primitives). Il est loin d'être exhaustif, car on pourrait passer un semestre entier sur l'intégration. Beaucoup de résultats seront admis ou donnés avec des hypothèses assez fortes. Au-delà des résultats qui vont être donnés ici, il faut savoir les utiliser afin de calculer des intégrales. Rappelons que si la dérivation est une opération "facile" (car systématique), le calcul d'intégrales est bien plus complexe. Pour l'instant, on dispose essentiellement de 3 méthodes pour calculer $\int_a^b f(x)\, dx$:

1. le calcul des sommes de Riemann et de leur limite : cette méthode est *en général* difficile à utiliser, et on évitera de le faire,
2. si f est une fonction usuelle, on peut trouver une primitive et donc calculer l'intégrale,
3. on peut aussi essayer de reconnaître f comme une dérivée usuelle, et donc trouver une primitive pour calculer l'intégrale.

Evidemment, ces trois méthodes ne sont pas suffisantes pour calculer toutes les intégrales. On va évoquer dans ce chapitre trois méthodes supplémentaires, qui nous permettront de calculer certaines intégrales.

I/ L'intégration par parties

L'intégration par parties est une façon de calculer l'intégrale d'un produit.

Proposition 8 : (intégration par parties) Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$. On suppose également que u' et v' sont continues. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx.$$

Preuve : Les fonctions $x \mapsto u'(x)v(x)$ et $x \mapsto u(x)v'(x)$ sont continues sur $[a;b]$, donc la fonction f définie par $f(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ aussi. Par ailleurs, la fonction F définie par $F(x) = u(x)v(x)$ est une primitive de f. Ainsi, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = [u(x)v(x)]_a^b .$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on peut décomposer le membre de gauche en

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Finalement, on obtient

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b ,$$

ce qui est bien le résultat voulu en passant la seconde intégrale à droite.

□

En pratique, si on veut intégrer une fonction f, on essaie de la reconnaître comme un produit $u(x)v'(x)$. Si le produit $u'(x)v(x)$ est plus simple à intégrer, on peut faire l'intégration par parties. Essayons un exemple d'application, et calculons :

$$I := \int_0^1 x\exp(x)\,dx.$$

La fonction f à intégrer est ici $f(x) = x\exp(x)$. On peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = u(x)v'(x) \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{lll} u(x) = x & \text{et} & v'(x) = \exp(x) \\ u'(x) = 1 & \text{et} & v(x)\exp(x) \end{array} \right.$$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$I = [x\exp(x)]_0^1 - \int_0^1 \exp(x)\,dx = \exp(1) - \int_0^1 \exp(x)\,dx.$$

La dernière intégrale est maintenant facile à calculer car on connaît une primitive de $x \mapsto \exp(x)$. Finalement,

$$I = \exp(1) - [\exp(x)]_0^1 = \exp(1) - (\exp(1) - \exp(0)) = 1.$$

Remarque: *Dans l'exemple précédent, l'intégration par parties permet de faire le calcul immédiatement. Il faut garder en tête que parfois, il y a des calculs un peu plus importants à effectuer derrière.*

Exercice : Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a pas qu'une seule façon de calculer une intégrale. On veut calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,dx.$$

-i- En utilisant le formulaire de trigonométrie, calculer I.

-ii- En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$I = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)\, dx.$$

Retrouver alors que $I = \frac{1}{2}$.

Remarque: *La formule d'intégration par parties a un équivalent en termes de primitives. Si* F *et* G *sont deux fonctions dérivables sur un intervalle* I*, et que* F' *et* G' *sont continues, alors*

$$\int F(x)G'(x)\, dx = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)\, dx.$$

Exercice : Calculer les primitives suivantes : $\int x^2 \exp(x)\, dx$, $\int x \ln(x)\, dx$, $\int \ln(x)$.

II/ Le changement de variables

On a vu que l'intégration par parties est un moyen de calculer des intégrales, basé sur la formule de dérivation d'un produit. Dans la même optique, le changement de variables s'inspire de la dérivation des fonctions composées.

Proposition 9 : Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. Soit encore g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[\alpha; \beta]$. [1] On suppose encore que

$$g([\alpha; \beta]) \subset [a; b],$$

de sorte que la fonction $f \circ g$ est bien définie. On a alors :

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)\, dx.$$

Remarque: *En particulier, on utilisera en pratique cette formule avec une fonction* g *vérifiant*

$$\begin{cases} g(\alpha) = a \\ g(\beta) = b \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} g(\alpha) = b \\ g(\beta) = a \end{cases}$$

Preuve : Définissons deux nombres I_1 et I_2 par :

$$I_1 := \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\, dx, \qquad \text{et} \qquad I_2 := \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)\, dx.$$

On veut montrer que $I_1 = I_2$. Soit alors F une primitive de f sur $[a; b]$. C'est en particulier une primitive de f sur l'intervalle dont les bornes sont $g(\alpha)$ et $g(\beta)$ puisque par hypothèse, $g(\alpha), g(\beta) \in [a; b]$. Ainsi, on obtient $I_1 = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$.
Considérons maintenant la fonction G définie par $G(x) = F(g(x))$, pour $x \in [\alpha; \beta]$. Puisque F est dérivable, de dérivée f, et que g est également dérivable, on obtient G dérivable sur $[\alpha; \beta]$, et $G'(x) = F'(g(x))g'(x)$ (dérivation d'une composée). Comme $F' = f$, on a donc $G'(x) = f(g(x))g'(x)$. Ainsi, G est une primitive de la fonction

1. rappel : f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

$x \mapsto f(g(x))g'(x)$ qui apparaît dans l'intégrale pour I_2. Il s'en suit que $I_2 = G(\beta) - G(\alpha)$. On a donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)), \\ I_2 &= G(\beta) - G(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)), \quad \text{par définition de } G, \end{aligned}$$

et donc $I_1 = I_2$.

$\square$

Cette formule de changement de variables peut paraître compliquée, mais son application est vraiment utile. En exemple, essayons de calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx$ avec un changement de variables (et donc sans utiliser la primitive usuelle de tan). On écrit le raisonnement de deux façons différentes : une façon "académique", dans laquelle on applique formellement le théorème, en identifiant les fonctions f et g, ainsi que les bornes des intégrales, et la façon "traditionnelle", qu'on utilise en pratique :

Académique

On veut calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx$. On remarque que, pour $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$, on peut écrire

$$\tan(x) = f(g(x))g'(x),$$

avec $g(x) = \cos(x)$ et $f(X) = \frac{-1}{X}$. On a donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_{g(0)}^{g(\frac{\pi}{4})} f(x)\, dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-1}{x}\, dx \\ &= [-\ln(x)]_1^{\sqrt{2}/2} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -\ln\left(\sqrt{2}\right) + \ln(2) = \frac{1}{2}\ln(2). \end{aligned}$$

Pratique

On veut calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx$. On pose $t = \cos(x)$. On a alors $dt = -\sin(x)\, dx$. On calcule les bornes de l'intégrale : si $x = 0$, alors $t = 1$. Si $x = \frac{\pi}{4}$, alors $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-\,dt}{t} = \cdots \\ &= \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

Remarque: *Heureusement les deux approches donnent le même résultat. En pratique, si on veut calculer* $I = \int_a^b f(x)\, dx$ *avec un changement de variables (remplacer* x *par la variable* t*), on peut raisonner de 2 façons différentes :*

1. *On écrit* $t = g(x)$*, et on essaie de remplacer dans l'intégrale, en gardant à l'esprit que* $dt = g'(x)\, dx$*,*
2. *On écrit* $x = h(t)$*, auquel cas* $dx = h'(t)\, dt$.

Selon les cas, il faudra utiliser l'une ou l'autre des deux approches.

Exercice : En utilisant des changements de variables, calculer :

$$I_1 = \int_0^1 x\exp(x^2)\, dx, \qquad I_2 = \int_2 5\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{4+\sin(2x)}\, dx, \qquad I_4 = \int_0^{\pi} \sin(x)^4\cos(x)\, dx.$$

On peut trouver énormément de résultats relatifs au changement de variables. Un résultat intéressant à retenir est le résultat suivant : on veut calculer l'intégrale d'une fonction f de la forme

$$f(x) = \frac{P(\cos(x), \sin(x))}{Q(\cos(x), \sin(x)}, \tag{2}$$

où P et Q sont des polynômes. On peut *toujours* faire le changement de variables (attention tout de même aux domaines de définition)

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{i.e.} \quad x = 2\arctan(t).$$

On se ramène alors à l'intégrale d'une fraction rationnelle, pour lesquelles le paragraphe suivant peut nous aider.

Remarque: *[Règles de Bioche] Ce changement de variables peut mener à des calculs assez fastidieux, et il existe un certain nombres de règles particulières pour faire un meilleur changement de variables lorsque* f *est de la forme* (2) *:*

-i- *si* $f(-x) = -f(x)$, *alors on peut faire le changement de variables* $t = \cos(x)$,

-ii- *si* $f(\pi - x) = -f(x)$, *alors on peut faire le changement de variables* $t = \sin(x)$,

-iii- *si* $f(\pi + x) = f(x)$, *alors on peut faire le changement de variables* $t = \tan(x)$,

Si f *vérifie 2 des 3 points précédents, alors on pourra utiliser* $t = \cos(2x)$.

Il n'est pas nécessaire de connaître ces règles par cœur, mais il absolument savoir que le changement de variables $t = \tan(\frac{x}{2})$ marche ; il peut juste donner des calculs plus compliqués. Illustrons ces règles sur un seul exemple, le calcul de

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\, dx.$$

Evidemment, le changement de variables n'est pas la seule façon de faire, et on peut remarquer que $I = \frac{1}{2}$. On peut remarquer que $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ vérifie les trois propriétés ci-dessus, si bien qu'on peut utiliser différents changements de variables.

1. *Le changement* $t = \cos(x)$ donne $dt = -\sin(x)\, dx$, si bien que :

$$I = \int_1^0 -t\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

2. *Le changement* $t = \sin(x)$ donne $dt = \cos(x)\, dx$, si bien que :

$$I = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

3. *Le changement* $t = \cos(2x)$ donne $dt = -2\sin(2x)\, dx = -4\sin(x)\cos(x)\, dx$, si bien que :

$$I = -\frac{1}{4}\int_1^{-1} dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^1 dt = \frac{1}{2}.$$

4. *Le changement* $t = \tan(\frac{x}{2})$ donne $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$. On a alors :

$$\sin(x)\cos(x)\, dx = \frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Ainsi, on obtient
$$I = \int_0^1 \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3}\, dt.$$
Notons que la forme est plus compliquée à intégrer que les précédentes. Toutefois, si on écrit :
$$\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3} = \frac{4t(2-(1+t^2))}{(1+t^2)^3} = \frac{8t}{(1+t^2)^3} - \frac{4t}{(1+t^2)^2},$$
on peut calculer les primitives, et obtenir :
$$I = \left[\frac{-2}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{1+t^2}\right]_0^1 = \cdots = \frac{1}{2}.$$

III/ La décomposition en éléments simples

Dans le paragraphe précédent, on a vu des changements de variables qui aboutissent au calcul d'une intégrale de la forme
$$\int_a^b \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt,$$
avec P et Q des polynômes. On parle également de *fraction rationnelle* pour la fonction $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. De manière générale, il n'est pas aisé de calculer ces intégrales. Le cœur du problème réside dans l'obtention d'une primitive pour une fraction rationnelle. Étudions quelques exemples simples :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{x-a}$. On connaît une primitive de f, donnée par $F(x) = \ln(|x-a|)$, sur $I =]a; +\infty[$ ou $I =]-\infty; a[$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ avec n un entier, $n \geqslant 1$. On a alors une primitive de f donnée par
$$F(x) = \frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}},$$
valide encore sur $I =]a; +\infty[$ ou $I =]-\infty; a[$.

Lorsqu'on veut calculer une primitive d'une fraction rationnelle, il serait agréable de pouvoir décomposer f en une somme d'éléments de la forme précédente, pour lesquels on sait calculer des primitives. Malheureusement, cela n'est pas toujours possible, et il faut utiliser des éléments supplémentaires.

Exercice : Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ et λ, μ deux réels. On considère f donnée par :
$$f(x) := \frac{\lambda x + \mu}{(x-a)^2 + b^2}. \tag{3}$$

-i- vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$,

-ii- en utilisant des composées de fonctions, donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Solution : Le polynôme au dénominateur n'a aucune racine réelle, donc ne s'annule jamais. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}$. On écrit ensuite :
$$f(x) = \frac{\lambda x + \mu}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{\lambda(x-a) + \mu + \lambda a}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{\lambda}{2}\frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + b^2} + (\mu + \lambda a)\frac{1}{(x-a)^2 + b^2}.$$

Pour la première partie, on reconnaît la dérivée de $\ln((x-a)^2+b^2)$ multipliée par $\frac{\lambda}{2}$. Pour la seconde, on peut écrire :

$$\frac{1}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2},$$

où l'on reconnaît alors la dérivée d'une composée avec arctan. Il s'en suit que :

$$\int f(x)\,dx = \frac{\lambda}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + \frac{\mu+\lambda a}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Remarque: *Il est possible (mais pas toujours facile) de calculer la primitive d'une fonction* f *définie par* (3). *Par extension (même si on ne l'utilisera pas ici), on peut aussi calculer des primitives pour des fonctions* f *définies par*

$$f(x) = \frac{\lambda x+\mu}{P(x)^k},$$

avec λ, μ *des réels,* $k \in \mathbb{N}$ *non nul, et* P *un polynôme du second degré à coefficients réels qui ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$.

Définition 10 : On appelle *élément simple de première espèce* toute fraction rationnelle de la forme

$$\frac{\lambda}{(x-a)^k},$$

où λ, a sont des réels et k un entier naturel non nul.
On appelle *élément simple de seconde espèce* toute fraction rationnelle de la forme

$$\frac{\lambda x+\mu}{((x-a)^2+b^2)^k},$$

où λ, μ, a, b sont des réels, $b \neq 0$ et k un entier naturel non nul.
On a vu qu'il est possible de déterminer des primitives pour des éléments simples. Le résultat suivant assure que ce sont les seules primitives nécessaires pour trouver la primitive d'une fraction rationnelle.

Théorème 11 : Soit f une fraction rationnelle, de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Alors il existe des éléments simples (de première et/ou seconde espèce) f_1, f_2,..., f_K et un polynôme R tels que

$$f(x) = R(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots f_K(x).$$

Remarque: *L'écriture ci-dessus s'appelle la décomposition en éléments simples de* f. *Elle permet alors de calculer une primitive de* f. *Notons que le polynôme* R, *appelée partie entière de* f, *n'apparaît que si* $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$.
Savoir qu'il existe une décomposition en éléments simples ne veut pas dire qu'on sait forcément la calculer. Donnons encore deux résultats généraux avant de passer aux exemples concrets.

Proposition 12 : On considère la fraction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Soient a, b deux réels, avec $b \neq 0$.

– s'il existe un polynôme Q_1 et un entier n non nul tels que $Q(x) = Q_1(x)(x-a)^n$ et $Q_1(a) \neq 0$, alors on peut trouver un polynôme P_1 et des réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(x-a)^n},$$

– s'il existe un polynôme Q_1 et un entier n non nul tels que $Q(x) = Q_1(x)\left((x-a)^2+b^2\right)^n$, alors il peut y avoir un élément simple de la forme $\frac{\lambda x+\mu}{((x-a)^2+b^2)^n}$ dans la décomposition de f.

Remarque: *[Avec les mains] Pour trouver les éléments qui figurent dans une décomposition en éléments simples, il suffit de regarder les facteurs du dénominateur* Q.

Passons maintenant aux exemples, car c'est par les exemples qu'on comprend mieux le fonctionnement de cette décomposition.

Exercice : Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4}$ en utilisant une décomposition en éléments simples.

Solution : Regardons le dénominateur x^2-4 qui se factorise en $(x-2)(x+2)$. On pose $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$. On cherche alors la décomposition en éléments simples de f sous la forme

$$f(x) = \frac{\lambda}{x-2} + \frac{\mu}{x+2}.$$

(cela signifie que l'on cherche λ et μ pour que l'égalité ci-dessus soit vraie). On peut alors remettre tout au même dénominateur, et obtenir :

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = f(x) = \frac{\lambda(x+2)+\mu(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(\lambda+\mu)x+2(\lambda-\mu)}{(x-2)(x+2)}.$$

On peut alors identifier les polynômes au numérateur, et l'on obtient :

$$\begin{cases} \lambda+\mu &= 0 \quad \text{(termes en } x\text{)}, \\ 2(\lambda-\mu) &= 1 \quad \text{(termes constants)} \end{cases}$$

La résolution du système donne alors $\lambda = \frac{1}{4}$ et $\mu = -\frac{1}{4}$. Il s'en suit que

$$f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+2}.$$

Sur l'intervalle $[-1;1]$, une primitive de f est alors donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4}\ln(2-x) - \frac{1}{4}\ln(x+2),$$

si bien que

$$I = [F(x)]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\ln(3).$$

Exercice : Donner la décomposition en éléments simples de $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+2x+2}$.

Solution f est une fraction rationnelle et le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur. On s'attend donc à avoir une partie entière. On peut écrire :

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2+2x+2} = \frac{x^3+2x^2+2x-2x}{x^2+2x+2} = x - \frac{2x}{x^2+2x+2}.$$

Comme le polynôme x^2+2x+2 n'a pas de racines réelles, on a directement obtenu la décomposition en éléments simples de f.

Exercice : Donner la décomposition en éléments simples de $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2(x-2)}$. En déduire une primitive F de f sur $[3;+\infty[$.

Solution Dans cet exemple, on n'a pas de partie entière, et on s'attend à une décomposition de la forme

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-2}.$$

On regroupe tout au même dénominateur pour essayer de trouver a, b et c.

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{(x-1)^2(x-2)} = f(x) &= \frac{a(x-1)(x-2) + b(x-2) + c(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)} \\ &= \frac{(a+c)x^2 + (-3a+b-2c)x + (2a-2b+c)}{(x-1)^2(x-2)}.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on peut identifier les termes en x^2, les termes en x et les termes constants au numérateur. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{r} a+c=0 \\ -3a+b-2c=2 \\ 2a-2b+c=-1 \end{array}\right. \quad \text{ce qui donne} \quad \left\{\begin{array}{r} a=-3 \\ b=-1 \\ c=3 \end{array}\right.$$

Ainsi, on a :

$$f(x) = \frac{-3}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-2}.$$

Une primitive F de f sur $[3; +\infty[$ est par exemple

$$F(x) = -3\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + 3\ln(x-2).$$

Exercice : Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-3x+2}$ sur $]-1; 0[$.

Solution Dans cet exemple, on s'attend de nouveau à trouver une partie entière. Pour la trouver, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-3x+2} = \frac{x^2-3x+2+3x-2}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{3x-2}{x^2-3x+2}.$$

Il reste à décomposer la dernière partie en éléments simples. On cherche si le polynôme au dénominateur admet des racines réelles, ici, on trouve 1 et 2 comme racines, si bien que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. On cherche alors à écrire

$$\frac{3x-2}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

avec a, b des réels. En réduisant au même dénominateur, on obtient

$$\frac{3x-2}{(x-1)(x-2)} = \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(a+b)x-(2a+b)}{(x-1)(x-2)}.$$

Par identification, on veut alors $a+b=3$ et $-(2a+b)=-2$. La résolution de ce système donne $a=-1$ et $b=4$, i.e.

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2}.$$

Une primitive de f sur $]-1;0[$ est alors

$$F(x) = x - \ln(1-x) + 4\ln(2-x).$$

Remarque: *Il existe d'autres méthodes pour calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples. Ils sont donnés en complément à titre indicatif, mais la réduction au même dénominateur et l'identification restent le meilleur moyen de ne pas se tromper.*

D'une manière générale, pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples, on peut suivre la "méthode" suivante :

- on détermine la partie entière (si elle existe), et on écrit $f(x) = R(x) + g(x)$, où R est un polynôme (partie entière), g une autre fraction rationnelle que l'on décompose en éléments simples,
- on identifie les éléments simples susceptibles d'être présents dans la décomposition de g,
- il faut ensuite calculer les coefficients de chaque élément simple. Pour cela, on réduit au même dénominateur, et on résout un système. En principe, on doit aboutir à un système à k équations et k inconnues, où k est le degré du dénominateur de g,
- avec ces coefficients, on a la décomposition de g, et donc de f.

§4 : A retenir

Ce cours est essentiellement un cours de "savoir-faire", il faut donc être en mesure :

1. de reconnaître des primitives usuelles (primitives de fonctions usuelles, ou composées usuelles),
2. de faire une intégration par parties,
3. de faire un changement de variables correctement,
4. de calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples (avec éventuellement un peu d'aide sur les éléments simples qui vont apparaître),
5. de combiner plusieurs de ces méthodes pour calculer une intégrale ou une primitive.

§5 : Compléments

I/ Sur les sommes de Riemann

Le lien entre intégrales et sommes de Riemann peut être utile pour calculer des sommes, ou plus précisément pour calculer des limites de sommes. Par exemple, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

En remarquant que

$$\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2},$$

on peut voir la somme comme la somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[0;1]$. Ainsi, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

II/ Sur la décomposition en éléments simples

Dans cette section, on considère une fraction rationnelle $f(x)$ que l'on veut décomposer en éléments simples. On écrira $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Par ailleurs, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ non nul, et un polynôme R tels que :

$$\begin{cases} Q(x) & = & R(x)(x-a)^n \\ R(a) & \neq & 0 \end{cases}$$

Dans ces conditions, il existe un polynôme P_1 et des réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{R(x)} + \frac{\alpha_1}{(x-a)} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(x-a)^n}.$$

On définit la fonction g par : $g(x) = (x-a)^n f(x)$.

Proposition 13 : Avec les notations précédentes, on a, pour $k \in \{0, \cdots, n-1\}$,

$$\alpha_{n-k} = \frac{g^{(k)}(a)}{k!}.$$

Preuve : Avec la décomposition précédente, on remarque que :

$$\alpha_n + \alpha_{n-1}(x-a) + \cdots + \alpha_1(x-a)^{n-1} = g(x) - (x-a)^n \frac{P_1(x)}{R(x)}.$$

Puisque $R(a) \neq 0$, la fraction rationnelle à droite est bien définie, même pour $x = a$. En prenant $x = a$ dans l'identité, on obtient $\alpha_n = g(a)$. Les autres coefficients s'obtiennent en dérivant l'égalité, et en utilisant $x = a$. En effet, si $G(x) = (x-a)^n \frac{P_1(x)}{R(x)}$, on peut remarquer que $G^{(k)}(a) = 0$ pour $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. En dérivant k fois le membre de gauche, on obtient $k!\alpha_{n-k}$, et en dérivant le membre de droite, on obtient $g^{(k)}(a)$.

□

Cette formule peut être utilisée pour calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples.