Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles : dérivation

Plan du cours

3 sept. 2015

On se limite dans ce chapitre à des fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On écrira parfois $f : I \to J$ pour noter une fonction f définie sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $J \subset \mathbb{R}$. Pour $x \in I$, on notera $f(x)$ la valeur de f au point x.

§1 : Rappels sur les fonctions

Définition 1 : On appelle *domaine de définition* de f, et on notera généralement D_f l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ a un sens.
On appelle *image* de f, et on notera généralement $f(D_f)$ l'ensemble des réels qui peuvent s'écrire sous la forme $f(x)$, pour un certain $x \in D_f$.

Par exemple, pour f définie par la formule $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, on a :

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\} \qquad\qquad f(D_f) = \mathbb{R}.$$

Pour $f(x) = \cos(x)$, on a :

$$D_f = \mathbb{R} \qquad\qquad f(D_f) = [-1; 1].$$

Définition 2 : *(composition)* Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to I$. On définit la composée de f et g, notée $f \circ g$ (prononcer "f rond g") par

$$(f \circ g)(x) := f\left(g(x)\right), \text{ pour } x \in J.$$

Remarque: *Il faut faire attention aux domaines de définition et aux domaines images. Il faut aussi noter que* $f\circ g \neq g\circ f$ *en général (dans certaines situations, l'une de ces compositions n'a d'ailleurs aucun sens).*

Définition 3 : Soit $f : I \to J$. On dira que f est :
- croissante lorsque, pour $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$,
- strictement croissante lorsque, pour $x < y$, on a $f(x) < f(y)$,
- décroissante lorsque, pour $x \leqslant y$, on a $f(x) \geqslant f(y)$,
- strictement décroissante lorsque, pour $x < y$, on a $f(x) > f(y)$.

Par exemple, la fonction définie par $f(x) = x^3$ est strictement croissante, la fonction définie par $g(x) = 3 - x$ est strictement décroissante, et la fonction définie par $h(x) = \lfloor x \rfloor$ (partie entière) est croissante.

Définition 4 : Soit $f : I \to J$. On dira que :
- f est *injective* sur I si pour tous $x, y \in I$ avec $x \neq y$, on a $f(x) \neq f(y)$,
- f est *surjective* sur J si pour tout $y \in J$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$,
- f est *bijective* de I sur J lorsque f est injective sur I et surjective sur J.

Remarque: *La bijectivité est une notion importante. Notons qu'il faut préciser un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée !*

Quelques exemples pour mieux comprendre :
- $x \mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$,
- cos n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ sur $[-1; 1]$, mais cos est bijective de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$,
- ln est bijective de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Le résultat suivant est très utile pour montrer qu'une fonction est bijective :

Proposition 5 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I (i.e. si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I), alors f est une bijection de I sur $f(I)$.

Preuve : Pour montrer que f est une bijection de I sur $f(I)$ il faut montrer que f est injective sur I et que f est surjective sur $f(I)$. Par définition de $f(I)$, f est surjective sur $f(I)$. Montrons donc l'injectivité. On prend donc $x, y \in I$, avec $x \neq y$. Il y a donc deux possibilités, $x < y$ ou $x > y$. En utilisant la stricte monotonie de f, on obtient $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$, si bien que $f(x) \neq f(y)$. Ainsi, f est injective sur I.

$\square$

Définition 6 : Soit $f : I \to J$ une bijection de I sur J. On appelle *réciproque* de f, et on note f^{-1} la fonction $J \to I$ telle que,

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad \text{pour } x \in I,$$
$$(f \circ f^{-1})(y) = y \qquad \text{pour } y \in J.$$

Remarque: *Attention, il ne faut pas confondre* f^{-1} *avec* $\frac{1}{f}$. *Ce sont des fonctions a priori différentes.*

Quelques exemples classiques de bijections, avec leur réciproque :

$f(x)$	I	J	$f^{-1}(x)$
x^2	$[0; +\infty[$	$[0; +\infty[$	$\sqrt{x}$
exp	$\mathbb{R}$	$]0; +\infty[$	$\ln(x)$
cos	$[0; \pi]$	$[-1; 1]$	$\arccos(x)$
sin	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1; 1]$	$\arcsin(x)$
tan	$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$[0; +\infty[$	$[1; +\infty[$	$\mathrm{argch}(x)$
$\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{argsh}(x)$

Définition 7 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dira que :
- f est paire lorsque $f(-x) = f(x)$ pour tout x,
- f est impaire lorsque $f(-x) = -f(x)$ pour tout x,
- f est périodique s'il existe $T > 0$ tel que, pour tout x,

$$f(x + T) = f(x).$$

Le plus petit T vérifiant cette propriété sera alors appelé période de f.

Par exemple, les fonctions définies par $f(x) = x^2$ ou $f(x) = \cos(x)$ sont paires, les fonctions définies par $h(x) = x^3$ ou $l(x) = \mathrm{sh}(x)$ sont impaires. Les fonctions cos et sin sont $2\pi-$périodiques, tan est $\pi-$périodique.
Terminons ce chapitre par le rappel de la définition d'une fonction continue.

Définition 8 : *(Continuité en un point, continuité sur un intervalle)* I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
- On dit que f est continue en a lorsque

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

- On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point $a \in I$.

Remarque: *[interprétation graphique] Une fonction est continue lorsqu'on peut tracer son graphe sans lever le crayon.*
Par exemple, les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions circulaires (cos, sin et tan) sont continues sur leurs ensembles de définition, mais la fonction "partie entière" n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice : On définit la fonction "partie entière", pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \;/\; n \leqslant x\}.$$

Déterminer l'ensemble des points où cette fonction est continue.

§2 : Définition de la dérivée

La notion de dérivée est une notion plus contraignante que la notion de continuité. Comme pour la continuité, on peut rencontrer la notion de dérivabilité en un point ou la notion de dérivabilité sur un intervalle.

Définition 9 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que :
- f est dérivable en a si le taux d'accroissement a une limite finie, i.e. s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b.$$

  On notera alors $b = f'(a)$, et on l'appelle *dérivée de* f *en* a,
- f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point $a \in I$.

Définition 10 : Si f est dérivable sur un intervalle I, on peut définir une nouvelle fonction sur I, par $x \mapsto f'(x)$. On appelle cette fonction *dérivée de* f.

Remarque: *[interprétation graphique] Si f est dérivable en a, alors la valeur $f'(a)$ représente la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$ (cf. figure 9). L'équation de cette droite tangente est alors :*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Proposition 11 : Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
La réciproque est en revanche FAUSSE. Par exemple, une fonction peut être dérivable uniquement sur une partie de son domaine de définition. Illustrons cela avec $f(x) = \sqrt{x}$. Alors f est définie et continue sur $[0; +\infty[$, mais f est dérivable uniquement sur $]0; +\infty[$.
On donne un tableau récapitulatif des principales dérivées. Il est utile de bien connaître ce tableau.

Tableau des dérivées usuelles

$f(x)$	D_f	f dérivable sur	$f'(x)$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)), \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$a^x, \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$	D_f	$\frac{1}{\cos(x)^2}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$
$\arcsin(x)$	$[-1;1]$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$[-1;1]$	$]-1;1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{argch}(x)$	$[1;+\infty[$	$]1;+\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{argsh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{argth}(x)$	$]-1;1[$	$]-1;1[$	$\frac{1}{1-x^2}$

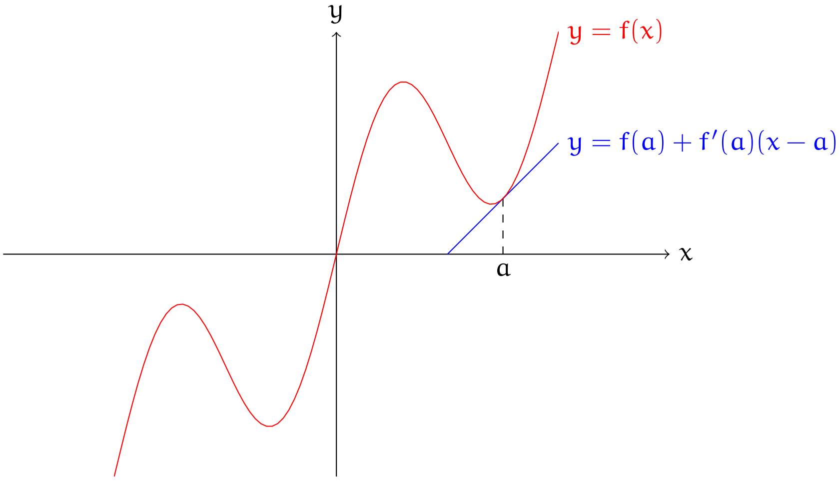

FIGURE 9 – Interprétation graphique de la dérivée

§3 : Règles de calcul

On verra qu'il n'est pas toujours aisé de calculer les dérivées à l'aide de la seule définition. C'est pourquoi on demande de retenir un certain nombre de dérivées usuelles, ainsi que les règles de calcul suivantes :

– si f et g sont dérivables en a, alors $f+g$ aussi, et

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

– si f est dérivable en a et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est dérivable en a, et

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a),$$

– si f est dérivable en a et que $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en a, et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2},$$

– si f et g sont dérivables en a, alors fg aussi, et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

– si f et g sont dérivables en a avec $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

– si g est dérivable en a et f est dérivable en $g(a)$, alors $f \circ g$ est dérivable en a, et

$$(f \circ g)'(a) = f'\left(g(a)\right)g'(a)$$

– si $f : I \to J$ est une bijection dérivable telle que f' ne s'annule pas, alors la réciproque f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$, i.e., pour $x \in J$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

La règle de dérivation des composées de fonctions est probablement celle qui servira le plus souvent. Notons que l'on peut démontrer toutes ces formules à partir de la définition de la dérivée. On donne dans le tableau 1 un récapitulatif des composées usuelles que l'on peut trouver.

§4 : Applications : variations d'une fonction et extrema

I/ Variations d'une fonction

L'étude du signe de la dérivée permet de donner des indications sur les variations d'une fonction.

Théorème 12 : Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors

- f est croissante (resp. décroissante) sur $[a; b]$ si et seulement si, pour tout $x \in [a; b]$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$),
- Si pour tout $x \in [a; b]$, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Remarque: *Pour la stricte monotonie, on n'a pas d'équivalence. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée s'annule en $x = 0$.*

Preuve : La preuve est donnée afin de rendre ce cours le plus complet possible. L'important est de retenir et de savoir utiliser le théorème, on pourra se dispenser d'apprendre

$f \circ u$	$(f \circ u)'$	$f \circ u$	$(f \circ u)'$
$u(x)^n$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$	$\exp\left(u(x)\right)$	$u'(x)\exp\left(u(x)\right)$
$\dfrac{1}{u(x)^n}$	$\dfrac{-nu'(x)}{u(x)^{n+1}}$	$\ln\left(u(x)\right)$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$a^{u(x)}$	$u'(x)\ln(a)a^{u(x)}$
$\cos\left(u(x)\right)$	$-u'(x)\sin\left(u(x)\right)$	$\arccos\left(u(x)\right)$	$\dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\sin\left(u(x)\right)$	$u'(x)\cos\left(u(x)\right)$	$\arcsin\left(u(x)\right)$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\tan\left(u(x)\right)$	$\dfrac{u'(x)}{\cos^2\left(u(x)\right)}$	$\arctan\left(u(x)\right)$	$\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

TABLE 1 – Dérivées de $f \circ u$ où f est une fonction usuelle, u une fonction dérivable

la démonstration. Ceci étant dit, la preuve repose sur le théorème des accroissements finis, que l'on peut trouver en fin de chapitre. Ce théorème assure que si f est dérivable sur $[a;b]$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{1}$$

Commençons par la chose la plus facile, et supposons que f soit croissante (le cas décroissant se fait de façon analogue). Soit alors $x_0 \in [a;b]$: par définition, on a

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

- Si $x < x_0$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$ car f est croissante, et donc le taux d'accroissement est positif,
- Si $x > x_0$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$ car f est croissante, et donc le taux d'accroissement est positif.

Ainsi, pour tout $x \in [a;b]$ différent de x_0, on a $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$. En passant à la limite, on obtient $f'(x_0) \geqslant 0$.
Montrons maintenant la réciproque. Soient $x, y \in [a;b]$, avec $x \leqslant y$. En appliquant (1) sur l'intervalle $[x;y]$, il existe c tel que :

$$f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Or, par hypothèse, $f'(x) \geqslant 0$, donc, puisque $y \geqslant x$, on obtient $f(y)-f(x) \geqslant 0$. On a donc montré que f est croissante. Les cas $f' \geqslant 0$, $f' > 0$ et $f' < 0$ se règlent de la même manière.

□

Exercice : (exemple d'application) Montrer que la fonction définie par $f(x) = \cos(x) + 2x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord, on remarque que f est bien définie est dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque c'est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x) + 2$. Comme sin est à valeurs dans $[-1;1]$, on en déduit que pour tout x, $f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On peut alors affirmer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$, et il ne reste qu'à déterminer $f(\mathbb{R})$. Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que f est continue, on en déduit que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, et donc,
f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

II/ Extrema d'une fonction

On s'intéresse dans cette section aux liens entre la dérivée d'une fonction et ses extrema. On se limitera à l'étude des extrema sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans toute cette section, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 13 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet :
- un *maximum global* en x_0 si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$,
- un *minimum global* en x_0 si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$,
- un *maximum local* en x_0 s'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ vérifiant $|x - x_0| \leqslant \epsilon$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$,

– un *minimum local* en x_0 s'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ vérifiant $|x - x_0| \leqslant \epsilon$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Remarque: *Un extremum global est en particulier un extremum local.*

Nous allons voir qu'il y a un lien entre la notion d'extremum local et la dérivée d'une fonction. Rappelons s'il le faut qu'une fonction définie sur un intervalle ouvert peut ne pas admettre d'extremum local. Par exemple, la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ n'a pas d'extremum local.

Remarque: *De façon moins mathématique, une fonction f admet un maximum (resp. minimum) local en x_0 lorsque, pour x assez proche de x_0, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).*

Proposition 14 : (extrema sur un intervalle ouvert) Soient $f :]a; b[\to \mathbb{R}$ dérivable sur $]a; b[$ et $x_0 \in]a; b[$. Si f admet un extremum local en x_0, alors on a

$$f'(x_0) = 0.$$

Preuve : Supposons pour l'instant que f admette un maximum local en x_0 (le raisonnement est identique dans le cas d'un minimum local). On regarde le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pour deux cas différents :

– si $x > x_0$, alors le numérateur est négatif ($f(x) \leqslant f(x_0)$) et le dénominateur est positif, donc le taux d'accroissement est négatif : en passant à la limite, on obtient $f'(x_0) \leqslant 0$,
– si $x < x_0$, alors le numérateur est négatif, ainsi que le dénominateur, donc le taux d'accroissement est positif : en passant à la limite, on obtient $f'(x_0) \geqslant 0$.

Il s'en suit que $f'(x_0) = 0$.

$\square$

Illustrons la proposition par un exemple. La fonction cos est à valeurs dans $[-1; 1]$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f admet un maximum local en $x_k = 2k\pi$ et un minimum local en $y_k = \pi + 2k\pi$ (ce sont même des extrema globaux).

Exercice :
– Montrer que la fonction tan n'a pas d'extremum local.
– Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + 2x$ n'a pas d'extremum local.
– Quel est le périmètre minimal d'un rectangle d'aire $100m^2$?

Remarque: *[Attention] Cette proposition n'est pas une équivalence, i.e. on peut trouver une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$ sans que f n'admette d'extremum local en x_0. Par exemple, pour $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$, on a $f'(0) = 0$ mais f n'a pas d'extremum local en 0.*

En résumé, pour trouver les extrema d'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, on procède de la manière suivante :

1. on calcule f' et on détermine tous les *points critiques*, i.e. les points $x_0 \in I$ tels que $f'(x_0) = 0$,
2. pour chaque point critique x_0, on étudie les variations de f autour de x_0 et on détermine si x_0 est un maximum local, un minimum local ou aucun des deux,
3. si on cherche les extrema globaux, il suffit alors de comparer les extrema locaux qu'on a trouvés.

Exercice : On définit f par $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$. Donner le domaine de définition de f. Montrer qu'elle admet un minimum local pour un certain x_0 que l'on déterminera, et que f n'admet pas de maximum local. Le minimum local est-il global ?

Passons maintenant à la recherche d'extrema d'une fonction sur un intervalle fermé. Rappelons tout d'abord le résultat suivant :

Proposition 15 : Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur l'intervalle $[a; b]$.
En d'autres termes, cette proposition assure que si une fonction est continue sur un intervalle fermé, elle y admet un maximum global et un minimum global. A fortiori, ce résultat est vrai pour une fonction dérivable. Comment alors trouver les extrema globaux d'une fonction dérivable sur un intervalle fermé ? On procède de la manière suivante : pour f dérivable sur $[a; b]$,
- on cherche les extrema locaux de f sur l'intervalle ouvert $]a; b[$,
- on compare les extrema éventuellement trouvés avec les valeurs $f(a)$ et $f(b)$.

Exercice : Donner les extrema globaux de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + 2$ sur $[-1; 2]$.

§5 : Développements limités

Lorsqu'on calcule des limites de fonctions, il peut arriver que l'on tombe sur des formes indéterminées. Lorsque les fonctions sont suffisamment régulières, on peut lever l'indétermination grâce à un outil appelé "développement limité" de la fonction.

<u>Définition 16 :</u> Soient g une fonction définie sur un intervalle I, et $x_0 \in I$. On notera $g(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ (prononcer "g est un petit o de $(x - x_0)^n$") si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Remarque: *Une autre façon d'écrire la définition est de dire que* $g(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ *s'il existe une fonction* ϵ *définie sur* I *telle que*

$$\begin{cases} g(x) &= \epsilon(x)(x - x_0)^n \\ \lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) &= 0 \end{cases}$$

Pour manipuler ces objets, on pourra penser (mais jamais écrire) que $o\left((x - x_0)^n\right)$ *correspond à* $(x - x_0)^{n+1}$.

Théorème 17 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable. Soit $x_0 \in I$. On a alors, pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{k!} + o\left((x - x_0)^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x - x_0)^k}{k!} + o\left((x - x_0)^n\right) \end{aligned}$$

Remarque: *Les développements limités sont une façon d'exprimer le fait que pour une fonction suffisamment dérivable, et* x *"assez proche" de* x_0*, l'erreur que l'on commet à remplacer* f *par un polynôme bien choisi est de l'ordre de* $(x - x_0)^n$.

Par exemple, on peut faire les développements limités suivants :

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right), \\
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right), \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

On récapitule dans le tableau 2 les développements limités usuels, qu'il est de bon ton de connaître.

Remarque: *Pour les développements limités des 4 dernières fonctions, on peut écrire des formules pour un ordre quelconque. Pour la tangente, c'est un peu plus compliqué.*

Pour illustrer l'utilisation des développements limités, cherchons à montrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Pour cela, on utilise le développement limité de sin en 0, à l'ordre 3, et l'on obtient :

$$\begin{aligned}
x - \sin(x) &= x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\
&= \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6} + o(1).$$

On peut alors passer à la limite (rappelons que par définition, $o(1)$ tend vers 0), et on obtient le résultat voulu.

§6 : Compléments

Dans cette section, quelques compléments, principalement sans démonstration. Il s'agit principalement de rappels, et il peut être utile de savoir utiliser notamment les résultats concernant les fonctions continues.

I/ sur les fonctions continues

Dans cette partie, on redonne deux résultats permettant de déterminer l'ensemble image d'une fonction continue. On rappelle la définition suivante de la borne inférieure et de la borne supérieure d'une fonction.

Définition 18 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On appelle borne inférieure de f (resp. borne supérieure) la quantité m (resp. M) définie par :

$$\begin{aligned}
m &= \inf_I f &:= \sup\{A \in \mathbb{R};\ \text{pour tout } x \in I, f(x) \geqslant A\}, \\
M &= \sup_I f &:= \inf\{A \in \mathbb{R};\ \text{pour tout } x \in I, f(x) \leqslant A\}.
\end{aligned}$$

Si le premier ensemble est vide, on a $\inf_I f = -\infty$. Si le second est vide, on a $\sup_I f = +\infty$.

$\exp(x)$	$=$	$1+\frac{x \;\; x^2}{+ \;\; 2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$
$\sin(x)$	$=$	$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\cos(x)$	$=$	$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$
$\frac{1}{1-x}$	$=$	$1+x+x^2+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$
$\frac{1}{1+x}$	$=$	$1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right),$
$\ln(1-x)$	$=$	$-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$
$\ln(1+x)$	$=$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+o\left(x^n\right)$
$\sqrt{1+x}$	$=$	$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^n+o\left(x^n\right)$
$(1+x)^\alpha$	$=$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$
$\mathrm{ch}(x)$	$=$	$1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$
$\mathrm{sh}(x)$	$=$	$x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\tan(x)$	$=$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o\left(x^8\right)$
$\arcsin(x)$	$=$	$x+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$
$\arctan(x)$	$=$	$x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$
$\mathrm{argsh}(x)$	$=$	$x-\frac{x^3}{6}+\cdots+(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$
$\mathrm{argth}(x)$	$=$	$x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$

TABLE 2 – développements limités usuels **en 0**.

Proposition 19 : Soit f définie et continue sur un intervalle fermé $I = [a; b]$. Alors $\inf_I f$ et $\sup_I f$ sont des réels, et l'ensemble image de I par f est l'ensemble J suivant :

$$J = \left[\inf_I f; \sup_I f\right].$$

Remarque: *En particulier, une fonction continue sur un intervalle fermé est bornée et atteint ses bornes.*
Dans le cas d'un intervalle ouvert, les choses sont un peu différentes, mais on peut citer le résultat suivant :

Proposition 20 : Soit f définie et continue sur un intervalle ouvert $I =]a; b[$. Si J désigne l'ensemble image de I par f, on a :

$$\left]\inf_I f; \sup_I f\right[\subset J.$$

En conséquence, si on a une fonction f définie et continue sur un intervalle I, on peut déterminer l'image J de I par f de la manière suivante :
- On détermine $\inf_I f$ et $\sup_I f$,
- On a alors $]\inf_I f; \sup_I f[\subset J$,
- On regarde si $\inf_I f$ et/ou $\sup_I f$ est dans l'image.

Exercice : Pour chacune des fonctions, déterminer le domaine de définition D_f et l'ensemble image de D_f par f :
- $f(x) = |x|$,
- $f(x) = \tan(x)$,
- $f(x) = \cos(x^2)$,
- $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

II/ sur les fonctions dérivables

Dans cette partie, on redonne trois résultats concernant les fonctions dérivables. Les preuves du théorème de Rolle et du théorème des accroissements finis font l'objet d'exercices dans la fiche de TD. Par ailleurs, dans la fiche de TD, il y a un exercice concernant la preuve de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n. Notons que les hypothèses données ici pour ces théorèmes ne sont pas optimales (i.e. on peut trouver des énoncés de ces théorèmes avec des hypothèses moins contraignantes), mais elles sont suffisantes pour le moment.

Théorème 21 : *(Rolle)* Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Ce théorème illustre essentiellement le fait que si une fonction dérivable prend deux fois la même valeur, alors elle doit admettre un extremum local entre les deux.

Théorème 22 : *(Accroissements finis)* Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Théorème 23 : *(Formule de Taylor-Lagrange)* Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Remarque: *On notera que le théorème des accroissements finis correspond à la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.*

La formule de Taylor-Lagrange est un cas particulier des formules de Taylor, qui peuvent être utiles notamment pour approcher une fonction par des polynômes. Notons également la similarité entre la formule de Taylor-Lagrange et les développements limités.

§7 : A retenir

1. définition et règles de calcul,
2. étude d'une fonction : domaine de définition, domaine image, dérivabilité, tableau de variations d'une fonction,
3. déterminer les extrema d'une fonction,
4. utiliser les développements limités pour calculer des limites.