Chapitre 0

(re)mise en route

Plan du cours

Septembre 2015

§1 : Sommes et produits

I/ Définitions

On dispose de n nombres a_1, a_2, ... a_n. On utilise les 2 notations suivantes :

- $\sum_{k=1}^{n} a_k$ pour désigner leur somme,
- $\prod_{k=1}^{n} a_k$ pour désigner leur produit.

L'indice k est appelé indice de sommation (ou de produit). Pour $m \in \mathbb{Z}$ et des nombres a_{m+1}, a_{m+2}, ... a_{m+n}, on peut écrire leur somme S de deux façons :

$$S = \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{m+k}.$$

Ceci permet de définir des sommes avec un indice de sommation ne commençant pas à 1. En outre, par convention, si $m \geqslant n$, on a :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \text{ et } \prod_{k=m}^{n} a_k = 1.$$

On a le droit d'ajouter des sommes et de multiplier des produits, il faut juste être attentif aux indices de sommation : par exemple, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \text{ et } \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right) = \prod_{k=1}^{n}(a_k b_k).$$

Dans le cas particuliers où tous les a_k (pour $k = 1, \ldots n$) sont égaux, disons à une valeur $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n\ a \text{ et } \prod_{k=1}^{n} a_k = a^n.$$

II/ Sommes et produits remarquables

Dans ce paragraphe, quelques illustrations avec des sommes et produits que l'on peut rencontrer. Il est important de connaître la définition de la factorielle.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

<u>Définition 1 :</u> *(factorielle)* Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le nombre $n!$ (prononcer factorielle n) par

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k.$$

§2 : Combinaisons et binôme de Newton

I/ Nombre de combinaisons

<u>Définition 2 :</u> *(combinaisons)* Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \leqslant n$, on définit le nombre de combinaisons de k parmi n, et on note $\binom{n}{k}$ (prononcer k parmi n) le nombre entier

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

On admettra ici que le nombre $\binom{n}{k}$ est toujours entier.

Proposition 3 : Pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$
$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n,}$$
$$\binom{n}{1} = n,$$
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Le nombre $\binom{n}{k}$ a une interprétation : si on a un ensemble de n éléments (par exemple n billes de couleurs toutes différentes), $\binom{n}{k}$ représente le nombre de tirages de k éléments que l'on peut obtenir si l'on ne tient pas compte de l'ordre des éléments.
Dans certains ouvrages (datant de quelques années), on peut rencontrer la notation C_n^k pour désigner $\binom{n}{k}$. Cette notation est obsolète, même si certains (dont l'auteur) s'en plaignent.

II/ Binôme de Newton

L'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ est souvent connue des étudiants, et elle peut se généraliser en

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Cette formule est appelée formule du *binôme de Newton*. Aussi utile soit-elle, il peut être fastidieux de calculer tous les $\binom{n}{k}$ à partir de leur définition. Écrivons la formule pour les premières valeurs de n :

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= 1a + 1b \\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4
\end{aligned}$$

Si on s'intéresse uniquement aux coefficients apparaissant dans les membres de droite, on obtient la pyramide suivante :

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

On remarque que chaque coefficient est la somme des deux qui se trouvent juste au dessus de lui. Cela permet facilement de calculer les coefficients de la ligne suivante. Par exemple, pour $n = 5$, on a la liste suivante pour les coefficients :
1, 1+4=5, 4+6=10, 6+4=10, 4+1=5, 1
ce qui donne
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Exercice : Calculer $\binom{5}{k}$ pour $k = 0, 1, \cdots 5$ et vérifier la formule précédente.

La pyramide utilisée pour calculer les coefficients du binôme de Newton est appelée *triangle de Pascal.* La règle de calcul que l'on en a déduite vient de l'égalité
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Exercice : Montrer que l'égalité ci-dessus est vraie.

§3 : Récurrence

Le principe de récurrence est une méthode efficace pour montrer qu'une certaine propriété H_n est vraie pour tous les entiers naturels. Elle repose sur deux principes :
- Initialisation : on montre que la propriété est vraie pour $n = 0$,
- Hérédité : en supposant que la propriété est vraie pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à un certain entier m, on montre qu'elle est encore vraie pour l'entier $m + 1$.

Lorsque l'initialisation et l'hérédité sont montrées, on a donc la propriété pour tous les entiers naturels. En effet, si H_0 est vraie, l'hérédité nous assure que H_1 aussi. Alors, puisque H_0 et H_1 sont vraies, l'hérédité donne H_2 vraie, et ainsi de suite...

Remarque: *On peut remplacer* 0 *dans l'initialisation par un autre entier* k *si on a besoin uniquement de la propriété pour* $n \geqslant k$.

Remarque: *Dans la plupart des ouvrages, le principe énoncé ci-dessus est appelé principe de récurrence forte. La différence réside dans l'hypothèse pour la phase d'hérédité (dans la version classique, on suppose la propriété vraie uniquement pour* $n = m$*). La récurrence forte permet de montrer plus de résultats que la récurrence classique, c'est pourquoi cette définition est donnée ainsi ici.*

Un dessin valant mieux qu'un grand discours, regardons quelques exemples.

I/ Sommes remarquables

On va montrer par récurrence que
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{0.1}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation :</u> on veut montrer la propriété pour $n = 0$, i.e. on veut montrer que
$$\sum_{k=0}^{0} k = 0.$$

Ceci est évidemment vrai car le seul élément de la somme dans le membre de gauche est $k = 0$.

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier m tel que l'égalité (0.1) est vraie pour tout $n \leqslant m$. On veut montrer qu'elle est encore vraie pour $m+1$. Il s'agit donc de calculer

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} k &= \left(\sum_{k=0}^{m} k\right) + (m+1) \\
&= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) \text{ (car (0.1) est supposée vraie pour } n = m) \\
&= \frac{m(m+1)+2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.
\end{aligned}$$

On a donc bien montré l'égalité (0.1) pour $n = m+1$. Le principe de récurrence nous permet donc de conclure que l'égalité (0.1) est bien vérifiée pour tout entier naturel n.

II/ Sommes des termes d'une suite géométriques

Prenons $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$. On veut montrer par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}. \tag{0.2}$$

Initialisation : On veut montrer l'égalité pour $n = 0$. La somme de gauche ne contient qu'un seul terme, qui est $q^0 = 1$. Pour le membre de droite, on a

$$\frac{q^{0+1}-1}{q-1} = \frac{q-1}{q-1} = 1.$$

Ainsi, l'égalité (0.2) est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose que (0.2) est vraie pour tout entier n inférieur ou égal à un certain m. On veut la montrer pour $n = m+1$. On calcule donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{m+1} \\
&= \frac{q^{m+1}-1}{q-1} + q^{m+1} \text{ car (0.2) est vraie pour } n = m \\
&= \frac{q^{m+1}-1+q^{m+2}-q^{m+1}}{q-1} = \frac{q^{m+2}-1}{q-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie pour $n = m+1$ et le principe de récurrence nous permet de conclure.

III/ La récurrence n'est pas réservée aux sommes

Un dernier exemple sur une suite numérique. On définit $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et pour $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. On veut montrer (par récurrence) que pour tout n, on a

$$u_n = 2^n. \tag{0.3}$$

Initialisation : Ici, on a besoin de vérifier la propriété pour $n = 0$ et $n = 1$ car la suite numérique est définie par les deux termes précédents. On nous donne $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 2 = 2^1$ donc l'égalité (0.3) est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité : On suppose que (0.3) est vraie pour tout entier n inférieur ou égal à un certain m.

On veut la montrer pour $n = m + 1$. On calcule donc

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= u_m + 2u_{m-1} \\ &= 2^m + 2\ 2^{m-1} \text{ car (0.3) est vraie pour } n = m \text{ ET } n = m - 1, \\ &= 2^m + 2^m = 2^{m+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie pour $n = m+1$ et le principe de récurrence nous permet de conclure.